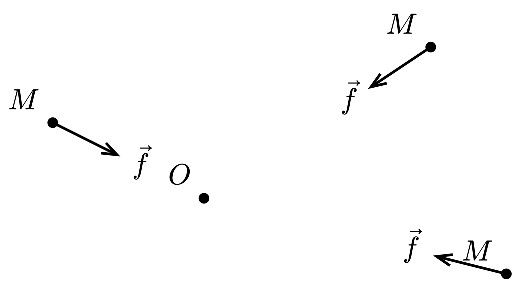
Mouvement dans un champ à force constante
Cas de la gravitation - Lois de Kepler
Planètes et satellites

I. Force centrale conservative - Cas de la gravitation

1) Force centrale

On rappelle la définition d'une **force centrale**: une force centrale est une force dont la droite d'action passe toujours par un point fixe:



2) Force conservative

On rappelle la définition d'une **force conservative**: c'est une force $\vec{f}$ qui dérive d'un potentiel:

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$$

Pour montrer qu'une force est conservative, on veut montrer que:

$$\delta W = -\,\mathrm{d}E_p$$

Pour étudier une force centrale, on se place en coordonnées sphériques:

$$\vec{f} = f\vec{u_r}$$

Si on étudie une force conservative de cette forme, on a alors:

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{u_r}$$

3) Exemple de la gravitation

On étudie les points M_1 de masse m_1, et M_2 de masse m_2.

On a:

$$\vec{f}_{1\to 2} = -G\frac{m_1 m_2}{(M_1 M_2)^3}\overrightarrow{M_1 M_2}$$

On place le point M_1 à l'origine O on renomme le point M_2 en point M et on se place en coordonnées sphériques:

$$\vec{f}_{O\to M} = -G\frac{m_1 m_2}{(OM)^3}\overrightarrow{OM} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r}$$

On calcule le trvail élémentaire:

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{f}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r}\cdot\left(\mathrm{d}r\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}\right) \\ &= -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathrm{d}r \\ &= -\,\mathrm{d}\left(-G\frac{m_1 m_2}{r}\right) = -\,\mathrm{d}E_p\end{aligned}$$

Avec:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r} + \text{constante}$$

En générale, on choisit l'origine des potentiels à l'infini. La constante est donc nulle.

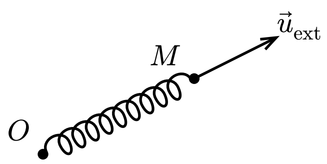
4) Autres exemples

On peut prendre comme exemple:

- La force de coulomb:

  Avec $\vec{f}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u_r}$.

- La force de rappel du ressort:



$$\vec{f} = -k\Delta l\vec{u}_{\text{ext}}$$

$$\vec{f} = -k(r - l_0)\vec{u_r}$$

$$\begin{aligned}\delta W = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= -k(r-l_0)\vec{u_r}\cdot(\mathrm{d}r\vec{u_r} + \ldots) \\ &= -k(r-l_0)\,\mathrm{d}r \\ &= -\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}k(r-l_0)^2\right)\end{aligned}$$

  D'où: $E_p = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 + \text{constante}$

II. Généralités des mouvements à force centrale conservative

✓ Tip:
On devra presque toujours redémontrer ces résultats en exercice.

On étudie le système du point M dans un référentiel galiléen. On fait un bilan des forces:
- La force centrale conservative $\vec{f} = f\vec{u_r}$

1) Conservation du moment cinétique

On commence par montrer la conservation du moment cinétique. Par le théorème du moment cinétique:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

Or $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$ et $\vec{f} = f\vec{u_r}$, donc les deux vecteurs sont colinéaires, donc:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = 0$$

Le moment cinétique est donc conservé.

2) Mouvement plan

Comme le moment cinétique est conservé, on peut montrer que le point M évolue dans un plan. On a établi que:

$$\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M) = \text{constante}$$

Par définition du produit vectoriel, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires au vecteur $\overrightarrow{L_O}(M)$, qui est constant.

- Si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, le mouvement est rectiligne.
- Sinon, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ forment un plan passant par le point O, et ce plan est perpendiculaire à $\overrightarrow{L_O}(M)$.

Dans les deux cas, le point M évolue dans un plan qui reste fixe. On peut donc se placer en coordonnées polaires:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$$

3) Constante des aires

On reprend le moment cinétique:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_O}(M) &= r\vec{u_r} \wedge m\vec{v} \\ &= mr\vec{u_r} \wedge \left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right) \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}\end{aligned}$$

Le moment cinétique et la masse sont constants, donc la quantité $r^2\dot{\theta}$ reste constante.

Donc la vitesse angulaire sera beaucoup plus grande proche du centre de la trajectoire que loin.

4) Conservation de l'énergie mécanique

$\vec{f}$ est une force conservative, donc l'énergie mécanique se conserve.

On peut expliciter la forme prise par l'énergie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

En cordonnées polaires:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Donc:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

D'où:

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

On peut donc exprimer l'énergie mécanique:

$$E_m = E_c + E_p(r) \text{ (l'énergie potentielle ne dépend que de } r\text{)}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2\dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{1}{r^2} r^4\dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + C^2 \frac{1}{2} \frac{m}{r^2} + E_p(r) \text{ avec } C = r^2\dot{\theta} \text{ constante}$$

On peut donc exprimer l'énergie mécanique en fonction d'un seul paramètre. Super! Les raisonnements énergitiques sont donc super youpi maintenant.

5) Énergie potentielle effective et étude qualitative du mouvement

On a maintenant une super intuition qui nous chuchote dans l'oreille d'essayer de séparer les termes en $\dot{r}$ et en r.

On définit l'**énergie potentielle effective**. Elle récupère une partie de l'énergie cinétique, mais comme une énergie potentielle normale, *elle ne dépend que de la position.* Ici:

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} + E_p(r)$$

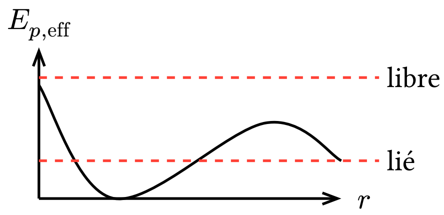
On reprend l'expression tronquée d'énergie cinétique. On sait que:

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 \geq 0$$

Donc, à tout moment,

$$E_m \geq E_{p,\text{eff}}(r)$$

Selon l'énergie mécanique originale du système, le mouvement peut donc être **libre** (r peut aller jusqu'a $+\infty$) ou **lié** (r est confiné à un intervalle)



III. Cas d'une interaction newtonienne

1) Interaction newtonienne

On définit une **interaction newtonienne** $\vec{f}$ par une force *centrale* d'amplitude proportionelle à $\frac{1}{r^2}$:

$$\vec{f} = \frac{K}{r^2}\vec{u_r}$$

On montre qu'elle est conservative:

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= \left(\frac{K}{r^2}\vec{u_r}\right) \cdot \left(\mathrm{d}r\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u_\varphi}\right) \\ &= \mathrm{d}r\frac{K}{r^2} = -\,\mathrm{d}\left(\frac{K}{r}\right) = -\,\mathrm{d}E_p\end{aligned}$$

On prend donc $E_p = \frac{K}{r}$ + constante avec la constante nulle pour l'origine des potentiels à l'infini.

2) Caractère attractif ou répulsif

- Si $K > 0$, $\vec{f}$ va dans le même sens que $\vec{u_r}$ et est donc centrifuge (répulsive)
- Si $K < 0$, $\vec{f}$ va dans le sens inverse de $\vec{u_r}$ et est donc centripète (attractive)

3) Discussion qualitative du mouvement

On reprend l'expression de l'énergie potentielle effective vue précedemment:

$$E_p = \frac{K}{r} \Rightarrow E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{c^2}{r^2} + \frac{K}{r}$$

On dérive:

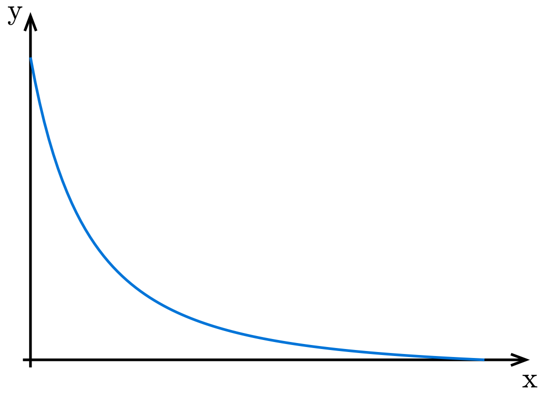
$$\frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{mc^2}{r^3} - \frac{K}{r^2} = -\frac{mc^2 + Kr}{r^3}$$

On a toujours $mc^2 > 0$ et $r > 0$.

Dans le cas $K > 0$, $mc^2 + Kr > 0$, donc

$$\frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r} < 0$$

l'énergie potentielle effective ne s'annule jamais et est une fonction décroissante de r. En regardant les limites pour $r \to 0$ et $r \to +\infty$, $E_{p,\text{eff}}$ est de la forme:



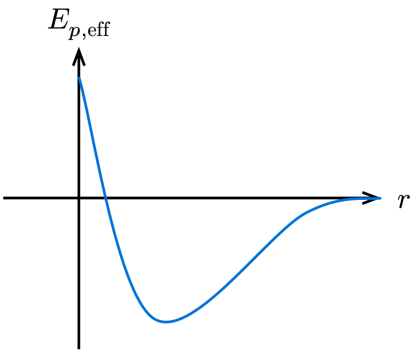
Donc tout système possède un mouvement libre.

> ✓ Tip:
> Comme $E_m = E_c + E_p$, si on trouve une énergie mécanique négative dans l'étude d'une force newtonienne avec $K > 0$, on sait qu'on s'est trompé.

- Si $K < 0$, alors $\frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r}$ s'annule pour $r_0 = -\frac{mc^2}{K}$.
  L'énergie potentielle effective est décroissante jusqu'en r_0 puis croissante. Elle admet donc un minimum en r_0.

  On calcule ce minimum:

$$E_{p,\text{eff}}(r_0) = -\frac{K^2}{2mc^2}$$



Dans le cas de la gravitation, les mouvement peuvent être liés ou libres

4) Discussion sur la nature du mouvement

Pour $K < 0$, la trajectoire du mouvement suivra un conique:
- Pour $E_m < 0$, la trajectoire suivie est une ellipse
- Pour $E_m = 0$, la trajectoire suivie est parabolique
- Pour $E_m > 0$, la trajectoire suivie est hyperbolique

On définit un paramètre e, l'eccentricité, qui pour chacun des cas respecte $e < 1$, $e = 1$ et $e > 1$, d'équation de trajectoire:

$$r = \frac{p}{-\varepsilon + e\cos(\theta - \theta_0)} \text{ avec } P = \frac{mC^2}{|K|} \text{ et } \varepsilon = \frac{K}{|K|} = \pm 1$$

IV. Mouvement des planètes et lois de Kepler

1) Énoncé des lois de Kepler

Θ Théorème:

1. Le centre des planètes décrit une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil
2. Les rayons vecteurs balaient des aires égales pour des intervalles de temps égaux
3. Le rapport entre le carré de la période T de révolution de la planète autour du Soleil et le cube du demi grand axe a de la trajectoire est indépendant de la planète

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

2) Étude la trajectoire circulaire

On suppose que le mouvement étudié est plan donc on utilise les coordonnées polaires.

Donc:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Par hypothèse de trajectoire circulaire, $r = R$ constant, donc:

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Et:

$$\vec{a} = r\left(\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - \dot{\theta}^2\vec{u_r}\right)$$

Le mouvement étudié est uniforme, donc:

$$\overrightarrow{L_O}(M) = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z} = \text{constante}$$

Comme $r = R$ est constant, alors $\dot{\theta} = \text{constante}$

On souhaite obtenir le rayon de la trajectoire à partir de la vitesse:

$$\dot{\theta} = \text{constante}$$

$$\|\vec{v}\| = R\dot{\theta} = \text{constante}$$

On a:

$$mR\dot{\theta}^2 = \frac{GMm}{R^2}$$

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{R^2}$$

Donc:

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 = R\frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

De plus, on a:

$$v = R\left|\dot{\theta}\right| \Rightarrow \left|\dot{\theta}\right| = \frac{v}{R} = \frac{1}{R}\left(\sqrt{\frac{GM}{R}}\right)$$

On en déduit la période de rotation:

$$\omega = \left|\dot{\theta}\right| = \frac{2\pi}{T}$$
$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\dot{\theta}\right|} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

On obtient la troisième loi de Kepler:

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Étude énergétique:

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \text{constante}$$

On prend l'origine des potentiels à l'infini, donc:

$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{R}}$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R} = \frac{GMm}{2R} = -\frac{1}{2}E_p}$$

On en déduit l'énergie mécanique:

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}E_p$$

3) Quelques caractéristiques de la trajectoire elliptique

	Circulaire	Elliptique
E_m	$-\frac{GMm}{2R}$	$-\frac{GMm}{2a}$
3eme Loi de Kepler	$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$	$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

V. Quelques remarques sur les satellites

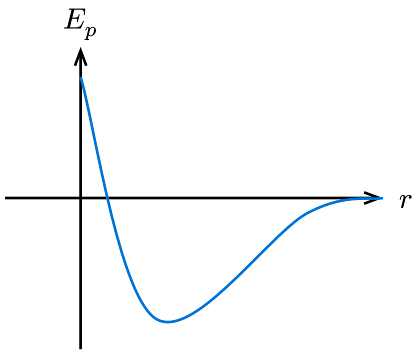
1) Vitesse circulaire ou 1ere vitesse cosmique

C'est la vitesse pour se placer en orbite circulaire:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

2) Vitesse de libération ou 2$^{\text{eme}}$ vitesse cosmique

C'est la vitesse nécessaire pour se libérer de l'attraction de l'astre. On regarde le graphe d'énergie mécanique:



$E_m = 0$ est la première valeure possible en partant d'un état lié pour obtenir un état libre. On a:

$$E_m = E_c + E_p$$

On se place dans l'hypothèse d'un satellite sur une trajectoire circulaire de rayon R

$$\Rightarrow E_p = \frac{-GMm}{R}$$

Pour avoir:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_L^2 \text{ avec } v_L \text{ la vitesse de libération}$$

$$\frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v_L = \sqrt{2\frac{GMm}{R}} = \sqrt{2}v_0$$

3) Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire tourne à la même vitesse que la vitesse de rotation de la Terre (il reste au-dessus du même point tout le temps).

Il faut donc que la période de rotation T valle $T = 24$ H

On a:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow R = \sqrt[3]{T^2\frac{GM}{4\pi^2}}$$