Solide en rotation autour d'une axe fixe Δ

I. Mouvement d'un solide

1) Rappel - Définition d'un solide

Un solide est un ensemble de points S tel que:

$$\forall A, B \in S, \left\|\overrightarrow{AB}(t)\right\| \text{ est constante}$$

2) Description du mouvement d'un solide

Pour décrire le mouvement du solide dans son ensemble, on s'interesse au mouvement d'un point particulier d'un solide.
On prendra en général G le centre de gravité/le centre d'inertie/le centre de masse du solide.

On s'intéresse de plus à la rotation du solide sur lui même: on fixe des axes sur le solide et on note les angles entre les axes relatifs du solide et les axes fixes du repère.

On obtient donc 6 inconnus (3 pour la position et 3 pour la rotation)

On devra donc utiliser 2 méthodes de résolutions: le PFD *et* le théorème du moment cinétique.

3) Mouvement de translation

On parle de **translation** quand tout les point se deplacent de la même façon (cela inclu un mouvement circulaire de l'ensemble des points du solide).

4) Mouvement de rotation

On parle de **rotation** quand les points du solide se déplacent autour d'un axe du solide (les points ont des mouvement différents).

II. Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe Δ

1) Rappel : moment cinétique d'un point matériel

Un point M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ possède le moment cinétique suivant:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)$$

$$\overrightarrow{L_{\Delta}}(M) = \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) \cdot \overrightarrow{u_{\Delta}}$$

2) Moment d'inertie

En se plaçant calculant le moment cinétique:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = m\left(-zr\dot{\theta}\vec{u_r} + (\dot{r}z - \dot{z}r)\vec{u_\theta} + r^2\dot{\theta}\vec{u_z}\right)$$

En prenant $\Delta = (O_z)$ (donc $\overrightarrow{u_\Delta} = \vec{u_z}$), on fait le produit scalaire:

$$\overrightarrow{L_\Delta}(M) = mr^2\dot{\theta}$$

On définit J_Δ le moment d'inertie (constant dans un solide donné), ici $J_\Delta = mr^2$

> ✓ Tip:
> Pour le moment cinétique, J_Δ joue le même rôle que la masse dans la quantité de mouvement

3) Moment cinétique d'un système de points

Pour obtenir le moment cinétique combiné de plusieurs points, on les somme:

$$\overrightarrow{L_O} = \sum_i \overrightarrow{L_{O,i}} \text{ et } L_\Delta = \sum_i L_{\Delta,i}$$

4) Moment cinétique d'un solide

Un solide est un système continu de points. Pour obtenir son moment cinétique, on remplace la sommation discrète par une sommation continue:

Dans un solide quelconque, la masse peut varier. On a, en chaque point M du solide:

$$\underbrace{\mathrm{d}m}_{\text{"masse élémentaire"}} = \underbrace{\rho(M)}_{\text{masse volumique}} \underbrace{\mathrm{d}\tau}_{\text{volume élementaire}}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(S) &= \iiint_{M\in S} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right) \\
&= \iiint_{M\in S} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right) \\
\overrightarrow{L_\Delta}(S) &= \iiint_{M\in S} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}
\end{aligned}$$

On se place en coordonnées cylindriques:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_r}$$

$$\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}$$

Donc:

$$\overrightarrow{OM} \wedge \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}} = \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\left(r^2\dot{\theta}\vec{u_z} + (-r\dot{z} + z\dot{r})\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}z\vec{u_r}\right)$$

On prend le produit scalaire avec $\overrightarrow{u_\Delta} = \vec{u_z}$, et on obtient:

$$L_\Delta = \iiint_{M\in S} r^2\dot{\theta}\rho(M)\,\mathrm{d}\tau$$

5) Moment d'inertie d'un solide

On pose $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire. Tout les points du solide possèdent la même vitesse angulaire, on peut donc le factoriser et on a:

$$L_\Delta = \omega J_\Delta \text{ avec } J_\Delta = \iiint_{M \in S} r^2 \rho(M)\,\mathrm{d}\tau$$

6) Exemple de moment d'inertie

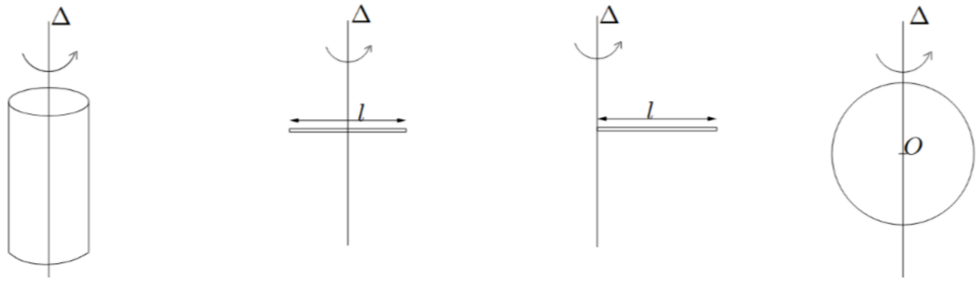


Fig. 1. – Les moments d'inertie étudiés

1. Moment d'inertie d'un cylindre de masse M, de densité constante ρ, de rayon R et de hauteur h autour d'un axe passant par le centre du cylindre. On a:

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau = \rho(\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z) = \rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

On intègre sur le cylindre (sur une ligne ($[0, R]$), qu'on balaye sur le cercle $[0, 2\pi]$ et sur toute la hauteur ($[0, h]$)) d'où:

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^3 \rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= \rho \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h 1\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\theta \right) r^3\,\mathrm{d}r \\ &= \rho \int_0^R (2\pi h) r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi h \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{\pi h \rho R^4}{2} \end{aligned}$$

2. Moment d'inertie d'une tige (infiniment fine) de masse M de longueur l de masse linéique $\lambda = \frac{M}{l}$ (en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) par-rapport à un axe passant par son milieu:

$$\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x$$

$$J_\Delta = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (\lambda\,\mathrm{d}x) r^2$$

Comme la tige est infiniment fine, le rayon à partir du centre est égale à la distance au centrer sur l'axe x, d'où:

$$
\begin{aligned}
J_\Delta &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (\lambda \,\mathrm{d}x) x^2 \\
&= \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{\lambda l^3}{12} = \frac{M l^2}{12}
\end{aligned}
$$

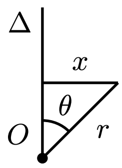
3. Moment d'intertie d'une tige de longueur l, de

$$J_\Delta = \int_0^l (\lambda \,\mathrm{d}x) x^2 = \frac{\lambda l^3}{3}$$

4. Moment d'interie d'une sphère de centre O, de rayon R, avec un axe Δ passant par son centre O. On se place en coordonnées sphériques:

$$\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)(r \,\mathrm{d}\theta)(\pi \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi)$$

On appelle x la **distance à l'axe** et r la distance dans les coordonnées sphériques:



On a donc:

$$x = r \sin\theta$$

$$
\begin{aligned}
J_\Delta &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} x^2 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \pi \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 (\sin\theta)^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \pi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \pi \int_0^R (\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi \right) (\sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta) r^4 \,\mathrm{d}r \\
&= \pi \int_0^R \left(\int_0^\pi 2\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta \right) r^4 \,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi^2 \int_0^R \left(\int_0^\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta \right) r^4 \,\mathrm{d}r \\
&\text{(faire un changement de variable ou linéariser pour calculer le } \sin^3\theta) \\
&= 2\pi^2 \int_0^R \frac{4}{3} r^4 \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{8}{3}\pi^2 \int_0^R r^4 \,\mathrm{d}r \\
&= 2 \times \frac{4}{3}\pi^2 \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R \\
&= \frac{2\pi^2 R^5}{5} \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

III. Actions mécaniques s'exerçant sur un solide en rotation

> Φ Note:
> Dans ce chapitre, on n'utilisera jamais de PFD ou d'énergétique sur un seul point. On utilisera toujours le théorème des moments cinétiques.
> Le point d'application de la force devient très important.

1) Rappel: moment d'une force par rapport à un axe

Avec $\overrightarrow{OM}_i$ le point d'application de la force $\vec{F}_i$:

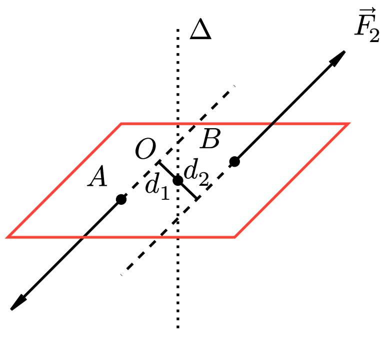
$$
\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\sum_i \vec{f}_i \right) = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i \text{ et } \mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}
$$

2) Couple de deux forces

On dit que deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ forment un couple $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right)$ par-rapport à Δ si:

- Les deux forces sont **opposées**: $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$
- Le moment de la résultante des forces n'est pas nul et est proportionnel à la distance:

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right) = Fd \neq 0$$



Avec d_1 la distance entre O et le projeté orthogonal de O sur (F_1) (la distance entre O et (F_1)), d_2 la distance entre O et (F_2), et $d = d_1 + d_2$ la distance entre $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ A et B

On parle de **couple moteur** si le couple augmente la vitesse de rotation, et de **couple de freinage** si il diminue la vitesse de rotation.

✓ Tip:
Un couple de forces ne fait que appliquer une rotation et n'applique aucune translation.

α Hors-programme:
Toute action mécanique sur un solide peut être décrîte par:

- Une force sur le centre de gravité (qui n'applique qu'une translation)
- Un couple (qui n'applique qu'une rotation)

On parle alors de **torseur**.
Voir Torseur cinétique et Torseur cinématique

3) Cas des couples de torsions

De la même manière qu'un ressort applique une force de rappel sur un point, un couple de torsion applique un moment de rappel d'amplitude $\Gamma = -C\alpha$ avec α l'angle de torsion et C la cosntante de torsion du fil (équivalent à k la raideur du ressort).

4) Liaison pivot

On appelle **liaison pivot** une liaison entre des solides qui permet de limiter le mouvement d'un solide à la rotation autour d'une axe fixe.

On supposera toujours que les liasons pivots sont parfaites et sans frottement.

IV. Théorème du moment cinétique par-rapport à un axe

1) Rappel: théorème du moment cinétique par-rapport à un axe fixe pour un point matériel

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,i}$$

2) Théorème du moment cinétique par-rapport à un axe fixe pour un système de point matériel

Pour un ensemble de points matériels, on somme le théorème des moments cinétique pour chaque point:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\mathrm{d}L_{\Delta,k}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \left(\sum_i \mathcal{M}_{\Delta,k,i} \right)$$

3) Théorème du moment cinétique par-rapport à un axe fixe pour un solide

On passe d'une sommation discrète à une sommation continue:

4) Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour de Δ

On a:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(J_\Delta \dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta$$

5) Conservation du moment cinétique

Si la somme du moment des forces est nul, alors le moment cinétique (et donc la vitesse angulaire reste constante).

Pour que le système soit à l'équilibre, il faut de plus que la vitesse angulaire (et la vitesse de translation) soit nulle.

V. Aspects énergétique d'un solide en rotation atuour d'un axe fixé

1) Énergie cinétique

On reprend l'expression de l'énergie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{/\mathcal{R}}(M)^2$$

On avait vu que pour obtenir l'énergie cinétique d'un système de point, on fait la somme:

$$E_c = \sum_i E_{c,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{/\mathcal{R}}(M_i)^2$$

Pour obtenir l'énergie cinétique d'un solide, on transforme la somme discrète en somme continue:

$$E_c = \iiint_{M \in S} \frac{1}{2} (\rho \, \mathrm{d}\tau) v_{/\mathcal{R}}(M)^2$$

Exemple: solide en rotation autour de l'axe (O_z): si on prend un point M appartenant au solide:

$$\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = \underbrace{\dot{r}\vec{u_r}}_{\text{nul car } r \text{ constant dans un solide}} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Donc:

$$\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = r\dot{\theta}\vec{u_\theta} \Rightarrow v_{/\mathcal{R}}(M)^2 = r^2\dot{\theta}^2$$

En reprenant l'expression de l'énergie cinétique:

$$
\begin{aligned}
E_c &= \iiint_{M\in S} \frac{1}{2}\rho \,\mathrm{d}\tau r^2 \dot{\theta}^2 \\
&= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \underbrace{\iiint_{M\in S} \rho \,\mathrm{d}\tau r^2}_{J_\Delta} \\
&-\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 J_\Delta
\end{aligned}
$$

2) Puissance et travail

On a:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \mathcal{M}_\Delta \dot{\theta} \text{ (expression à réétablir avec le mouvement élémentaire)} \\
&= \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_\Delta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
&\Rightarrow \delta W = \mathcal{M}_\Delta \,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

On retrouve le théorème de l'énergie cinétique et de l'énergie mécaniuqe:

$$
\mathrm{d}E_c = \sum \delta W \text{ actions mécaniques}
$$

$$
\mathrm{d}E_m = \sum \delta W \text{ actions mécaniuqes non conservatives}
$$

VI. Applications

1) Équilibre d'une barre reposant sur le sol et maintenue par un filin

Une barre AB de masse $M = 15$ kg est posée sur le sol et maintenue en équilibre par un filin horizontal BC. La barre fait alors un angle $\alpha = 50°$ par rapport à l'horizontale. On suppose que la barre et le filin sont dans un même plan et on prend $g = 9{,}8 \text{ m.s}^{-2}$ comme valeur de l'accélération de pesanteur. Déterminer les caractéristiques des forces s'exerçant sur la barre.

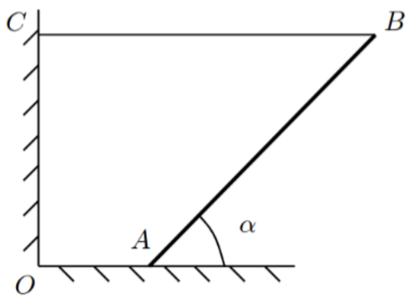


FIG. 6 – *Equilibre d'une barre posée sur le sol et maintenue par un filin.*

On s'intéresse au système du solide de la barre en équilibre (la barre ne translate pas et ne tourne pas), de masse m, de densité homogène et de centre de masse G.

> ✓ Tip:
> Comme on est à l'équilibre, on peut prendre n'importe quel axe. Dans ce genre de situation, on peut prendre le meilleur axe pour les calculs.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on fait un bilan des **actions mécaniques**:

- Le poids de la barre $m\vec{g}$, appliqué en G
- La réaction du support $\overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$, appliqué en A
- La tension du filin $\vec{T}$, appliqué en B

On est à l'équilibre donc:

- Le solide ne translation pas: la somme des forces et nulle.
- Le solide ne tourne pas, donc la somme des moment des forces est nul:

$$\sum \mathcal{M}_\Delta = 0 \text{ (avec } \Delta \text{ un axe quelconque)}$$

Donc:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} = 0$$

- On projette verticalement: $\overrightarrow{R_N} = -m\vec{g}$
- On projette horizontalement: $\overrightarrow{R_T} = -\vec{T}$

Pour les moments, on prend l'axe $\Delta = \left(A_y\right)$ (on se place orthogonal au plan étudié, et on fait disparaître le moment de la réaction), donc:

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{R_N}\right) = \mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{R_T}\right) = 0$$

Comme on est à l'équilibre:

$$\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) + \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = -\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}\right)$$

On calcule le moment cinétique:

$$\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = \mathcal{M}_A(m\vec{g}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = -mgAG\cos\alpha = -mg\frac{AB}{2}\cos\alpha$$

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = TAB\sin\alpha$$

D'où:

$$T = \frac{mg}{2\tan\alpha} = 61.7\text{N}$$

On en déduit:

$$R_T = T = 61.7\text{N et } mg = R_N = 9.81 \times 15 = 147.15\text{N}$$

On peut calculer le coefficient de frottement sec:

$$f = \frac{R_T}{R_N} \approx 0.4$$

2) Pendule pesant

Soit un solide de masse M en rotation autour d'un axe Δ supposé horizontal passant par un point fixe O du solide.

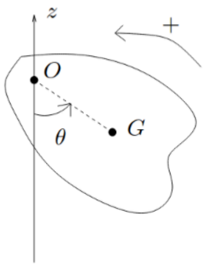


FIG. 8 – *Pendule pesant.*

On note J_Δ le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et a la distance entre O et le centre d'inertie du solide. On suppose que la liaison entre le solide et l'axe est une liaison pivot parfaite.

1. Obtenir l'équation différentielle du mouvement du solide en appliquant le théorème du moment cinétique.
2. Même question en utilisant un raisonnement énergétique.
3. Déterminer la période des petites oscillations.
4. Retrouver l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple.

a)

On définit le système du solide, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on fait un bilan des actions mécaniques:

- Le poids $m\vec{g}$
- La liaison pivot supposée parfaite

On fait un théorème du moment cinétique:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot}) + \mathcal{M}_\Delta(m\vec{g})$$

$$J_\Delta\ddot{\theta} = 0 + \mathcal{M}_\Delta(m\vec{g})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(m\vec{g}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$$

$$= a\vec{u_r} \wedge (mg\cos\theta\vec{u_r} - mg\sin\theta\vec{u_\theta}) = -mga\sin\theta\vec{u_z}$$

Donc:

$$\boxed{J_\Delta\ddot{\theta} = -mga\sin\theta}$$

b)

On pose l'énergie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned}\delta W(m\vec{g}) &= m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OG}\\ &= m\vec{g}\cdot a\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta}\\ &= -mg\sin\theta a\,\mathrm{d}\theta\\ &= -d(-Mga\cos\theta)\end{aligned}$$

On pose l'energie potentielle:

$$E_p = -mga\cos\theta + \text{constante}$$

$$E_c + E_p = \text{constante car pas d'actions mécaniques non conservatives}$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = \text{constante}$$

On dérive:

$$\boxed{J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + mga\sin\theta = 0}$$

c)

On fait une approximation des petits angles:

$$\sin\theta \approx \theta$$

Donc:

$$J_\Delta\ddot{\theta} + mga\theta = 0$$

Et on obtient l'équation différentielle du mouvement:

$$\ddot{\theta} + \frac{mga\theta}{J_\Delta} = 0$$

On reconnait un oscillateur harmonique et on identifie la pulsation:

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{J_\Delta} \Rightarrow T_0 = 2\pi\times\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$$

d) Cas du pendule simple

On assimile G à M, a à ℓ, $J_\Delta = ml^2$, on annule les variables et on se retrouve avec l'équation différentielle:

3) Pendule de torsion

Soit une barre solide horizontale de masse m, de longueur L suspendue en son milieu O à un fil de torsion de constante de torsion C. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe vertical passant par O. On suppose que la barre tourne dans le plan horizontal et que le fil de torsion reste vertical. On repère la position de la barre par l'angle α qu'elle fait par rapport à sa position d'équilibre.

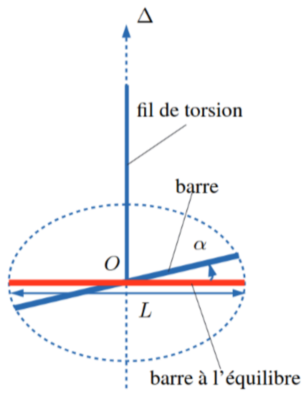


FIG. 10 – *Pendule de torsion.*

1. Établir l'équation différentielle du mouvement en α.
2. Donner l'expression de la période des oscillations.
3. Trouver une fonction de α et $\dot{\alpha}$ constante au cours du mouvement. Il s'agit d'une intégrale première du mouvement.

a) Équation différentielle du mouvement

On étudie le système solide de la barre, de masse m, de densité homogène, de longueur L suspendue en O dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On fait un bilan des actions mécaniques:
- Le poids $m\vec{g}$ appliqué en O
- Liaison pivot parfaite au fil
- Le couple de rappel $-C\alpha$

On applique le théorème du moment cinétique:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = J\ddot{\alpha} = \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g})}_{=0 \text{ car dans l'axe}} + \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison})}_{=0 \text{ pour la même raison}} - C\alpha$$

Donc:

$$\boxed{J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0}$$

b) Période des oscillation

$$\ddot{\alpha} + \frac{C\alpha}{J} = 0$$

On retrouve un oscillateur harmonique, on identifie:

$$\omega_0^2 = \frac{C}{J} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$$

c) Relation entre α et $\ddot{\alpha}$

On applique le théorème de l'énergie mécanique:

$$\Delta\left(E_c + E_p\right) = W_{\text{non conservative}} = 0$$

On calcule l'énergie potentielle du couple de rappel:

$$\mathcal{P} = -C\alpha\dot{\alpha} \Rightarrow \delta W = C\alpha d\alpha = -\,\mathrm{d}\left(\underbrace{\frac{1}{2}C\alpha^2}_{E_p}\right)$$

On utilise l'expression de l'énergie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2$$

$$E_c + E_p = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}C\alpha^2 = \text{constante}$$