Moment cinétique

I. Moment cinétique d'un point matériel

On introduit le moment cinétique, un nouvel outil définit à l'aide du produit vectoriel. Le moment cinétique est à la rotation ce que la quantité de mouvement est à la translation.

Il existe deux moments cinétiques différents:
1. Le moment cinétique par-rapport à un point (le moment cinétique sera vectoriel)
2. Le moment cinétique par-rapport à un axe (le moment cinétique sera scalaire)

1) Moment cinétique par-rapport à un point

On note $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)$ ou $\overrightarrow{\sigma_{O/\mathcal{R}}}(M)$ le moment cinétique d'un point M par-rapport au point O, avec $\mathcal{R}$ le référentiel.

On le définit (avec $\vec{p}$ la quantité de mouvement) par:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) &= \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p_{/\mathcal{R}}}(M) \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\end{aligned}$$

2) Dépendance du moment cinétique par-rapport au point considéré

Si on prend O et O' deux points différents on a:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{O'/\mathcal{R}}}(M) &= \overrightarrow{O'M} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \\ &= \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) + \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) + \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}\end{aligned}$$

À moins d'avoir une vitesse nulle ou colinéaire au déplacement $\overrightarrow{O'O}$, on aura $\overrightarrow{L_{O'/\mathcal{R}}} \neq \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$

Donc le moment cinétique dépend du point utilisé.

3) Moment cinétique par-rapport à un axe

On considère Δ un axe passant par O et dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$.
On pose le moment cinétique par-rapport à O:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)$$

On définit le moment cinétique par-rapport à l'axe Δ par:

$$L_{\Delta/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Φ Note:
Le point O peut-être choisi arbitrairement. Démonstration en reprenant l'expression précedente avec O' un autre point de Δ:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{O'/\mathcal{R}}}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} &= \left(\underbrace{\overrightarrow{O'O} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}}_{\text{perpendiculaire à } \overrightarrow{u_\Delta}} + \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) \right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \\ &= \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}\end{aligned}$$

4) Cas d'un mouvement circulaire

On considère un point en mouvement circulaire. On se place en coordonées cylindriques avec l'axe (O_z) perpendiculaire au plan du mouvement et le point O centre de la trajectoire.

On a donc:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z} = r\vec{u_r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

(Comme on est en mouvement circulaire, on a $r = R$ constant, donc $\dot{r} = 0$, et $\dot{z} = 0$)

On calcule le moment cinétique:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \\ &= (R\vec{u_r} + z\vec{u_z}) \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta} \\ &= R\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta} \\ &= mR^2\dot{\theta}\vec{u_z}\end{aligned}$$

On en déduit le moment cinétique par-rapport à l'axe $\Delta = (O_z)$

$$\overrightarrow{L_{\Delta/\mathcal{R}}}(M) = mR^2\dot{\theta}$$

5) Cas général

On prend un point en coordonées cylindriques:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}} &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \\ &= (r\vec{u_r} + z\vec{u_z}) \wedge m\left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}\right) \\ &= m\left(r^2\dot{\theta}\vec{u_z} - r\dot{z}\vec{u_\theta} + z\dot{r}\vec{u_\theta} - zr\dot{\theta}\vec{u_r}\right) \\ &= -mrz\dot{\theta}\vec{u_r} + m(z\dot{r} - r\dot{z})\vec{u_\theta} + mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}\end{aligned}$$

✓ Tip:
On utilisera très peu cette forme, sauf dans quelques calculs de cours. Il est *en général* possible de trouver une expression plus jolie.

II. Moment d'une force

1) Définition du moment par-rapport à un point

De la même manière qu'on a définit le travail d'une force, on définit le moment d'une force par:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

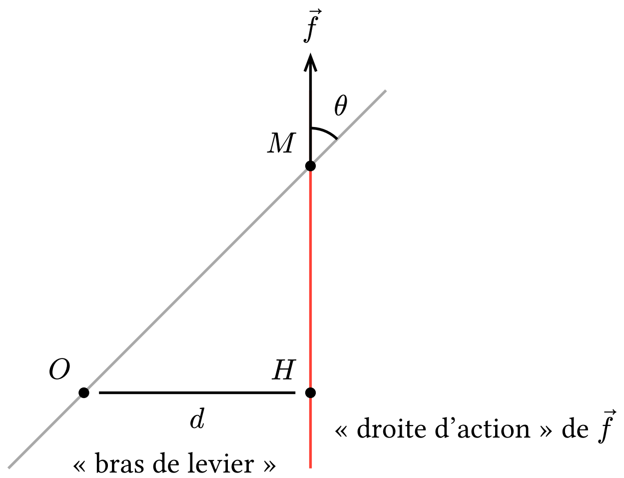
Si on prend O' un autre point:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}\left(\vec{f}\right) &= \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{f} \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{f} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{f} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)\end{aligned}$$

Donc comme pour les moment cinétiques, à moins que la force soit nulle ou collinéaire à $\overrightarrow{O'O}$, la valeur du moment dépend du point de référence choisit.

a) Calcul du moment d'une force avec le bras de levier

On définit le **bras de levier**, la distance entre le point O et **la droite d'action** de la force $\vec{f}$, qui permet de calculer la norme du moment de la force:



On a:

$$\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)\right\| = OM \times f \times \sin\theta$$

Le triangle OMH est triangle en H, donc:

$$\sin\theta = \frac{OH}{OM}$$

Donc:

$$OM\sin\theta = OH = d \text{ la distance de } O \text{ à la droite d'action de } \vec{f}$$

2) Moment d'une force par-rapport à un axe

On prend un axe Δ passant par un point O et de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$, et on définit le moment par-rapport à un axe:

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

III. Théorème du moment cinétique en référentiel galiléen

1) Théorème du moment cinétique par-rapport à un point fixe

Θ Théorème:
La dérivée du moment cinétique par-rapport à un point est égale à la somme des moments par-rapport à ce point:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)$$

On repart de la définition du moment cinétique:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right) \\
&= \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}_{\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \text{ car } O \text{ fixe}} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) + \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right)}_{\sum \vec{f}} \\
&= \vec{0} + \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \\
&= \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)
\end{aligned}$$

Φ Note:
Si O est mobile, on prend O' un point fixe, on peut décomposer (comme vu précedemment) $\overrightarrow{L_O}$ en $\overrightarrow{O'O}$ et en $\overrightarrow{L_{O'}}$ et on tombe sur:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} = \left(m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \wedge \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(O)\right) + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)$$

2) Théorème du moment cinétique par-rapport à un axe

Soit O un point d'un axe Δ fixe. Par le théorème du moment cinétique:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Θ Théorème:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}\right)$$

IV. Conservation du moment cinétique

1) Conditions de la conservation du moment cinétique

Le moment cinétique se conserve (= est constante) si sa dérivé s'annule, donc:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = 0$$

En substituant la définition du moment:

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{f} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

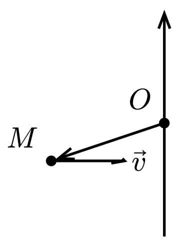
Donc le moment cinétique est constant si:
- Le point étudié est confondu avec l'origine
- La somme des forces est nulle
- Que $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ soient colinéaires.

Dans ce dernier cas, on parle de **force centrale**, quand la force totale $\vec{F}$ est toujours dirigée vers un point fixe O.

2) Mouvement plan

Si le moment cinétique est conservé, on a par définition que $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{\text{constante}}$

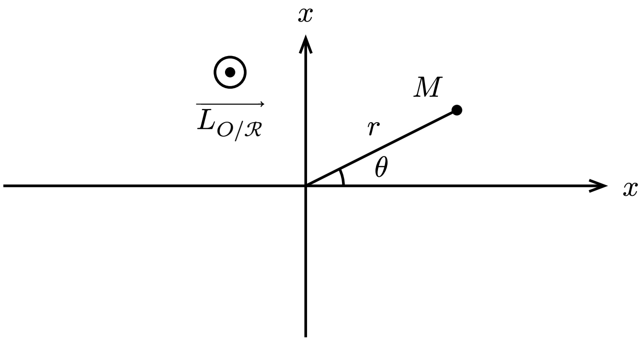
On se place dans la situation où le moment cinétique est non-nul, donc les vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)$ sont non-colinéaires et définissent deux directions différentes:



M évolue dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)$ et passant par O

✓ Tip:
Il faut d'abords montrer le mouvement plan, puis introduire les coordonnées polaires.

3) Constante des aires



On a:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$$

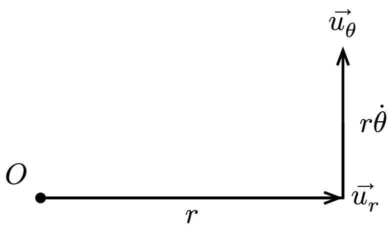
$$\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Donc:

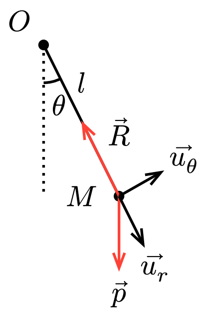
$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = (r\vec{u_r}) \wedge m\left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

Comme $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$, m et $\vec{u_z}$ sont constants, on en déduit que $r^2\dot{\theta}$ est constant.

On appelle cette quantité la **constante des aires**:



V. Exemple d'utilisation: le pendule simple



On étudie le système du pendule avec le point M de masse m dans le référentiel galiléen. On fait un bilan des forces:

- Poids: $\vec{p} = m\vec{g}$
- Tension du fil: $\vec{R}$

On peut résoudre par PFD, par énergétique ou par ✨ Théorème du moment cinétique ✨

> ✓ Tip:
> Le théorème du moment cinétique est pratique quand on peut faire disparaître des forces. Ici, la tension du fil est une force centrale, donc son moment des nul: pratique!

$r = l$ est constant, donc:

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = r\left(\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - \dot{\theta}^2\vec{u_r}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(m\vec{g}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{R}\right)$$

On se place dans les coordonnées polaires:

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u_r}$$

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Donc:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = l\vec{u_r} \wedge ml\dot{\theta}\vec{u_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

On a:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}\left(\vec{R}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \vec{0} \text{ car } \vec{R} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{OM}$$

On doit ensuite calculer le moment du poids:

- Première façon, par règle de la main droite pour le signe:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(m\vec{g}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} \\ &= -lmg\sin(\theta)\vec{u_z}\end{aligned}$$

- Deuxième façon, par projection:

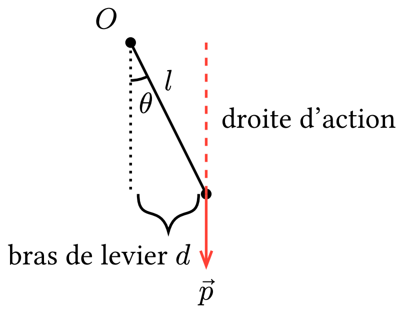
$$m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{u_r} - mg\sin\theta\vec{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u_r}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} &= l\vec{u_r}(mg\cos\theta\vec{u_r} - mg\sin\theta\vec{u_\theta}) \\ &= -lmg\sin\theta\vec{u_z}\end{aligned}$$

- Troisième façon, par bras de levier:

$$\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = \pm mg \underbrace{d}_{\text{bras de levier}} \vec{u_z}$$



On a $d = l\sin\theta$, donc $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = \pm lmg\sin(\theta)\vec{u_z}$

Le poids entraîne le fil dans le sens anti-trigonométrique, donc:

$$\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -lmg\sin(\theta)\vec{u_z}$$

On se retrouve donc avec:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(ml^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} = -lmg\sin(\theta) \\ \Leftrightarrow ml^2\ddot{\theta} = -lmg\sin(\theta) \\ \Leftrightarrow l\ddot{\theta} + g\sin(\theta)\end{aligned}$$