Mouvement des particules chargées dans des champs électriques et magnétiques uniformes et stationnaires

I. Force de Lorenz

La force de Lorenz est la force qui s'exerce sur une particule chargée en présence d'un champ électrique ou magnétique.

1) Définition

On définit la force de Lorenz $\vec{f}$ par:

$$\vec{f} = F_{\text{elec}} + F_{\text{mag}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

$$F_{\text{elec}} = q\vec{E} \text{ et } F_{\text{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Avec q la charge (en eV) qui peut être positive ou négative, $\vec{v}$ la vitesse de la particule, $\vec{E}$ le champ électrique et $\vec{B}$ le champ magnétique.

> Φ Note:
> On verra la définition et la création des champs magnétiques l'année prochaine. Cette année, ils seront donnés dans les exercices.

On remarque que les particules stationnaires ne sont pas affectées par le champ magnétique.

2) Ordre de grandeur

Les particules étudiées sont en genéral des particules possédant une charge élémentaire (protons ou neutrons), donc

$$|q| = e$$

On se place dans un environnement relativiste (donc vitesses bien plus faible que la vitesse de la lumière), au max $v \leq \frac{c}{10}$

En prenant un champ magnétique relativement fort de $B = 0.1\text{T}$, on trouve un ordre de grandeur de la force magnétique de:

$$F_{\text{mag}} \approx evB = 5 \times 10^{-13} \quad \text{N}$$

Si on suppose que F_{elec} est du même ordre de grandeur que F_{mag},
on aurait alors $E \approx vB \approx 3 \cdot 10^{6} \text{ V m}^{-1}$, qui est un énorme champ électrique qui ne sera pas vu en général.

La majorité du temps, la force électrique sera donc négligeable devant la force magnétique.

La force de gravitation est de l'ordre de $mg = 9.1 \times 10^{-31} \times 10 \approx 10^{-29}$N et est complètement négligeable.

II. Mouvement dans un champ électrique

La majorité du temps, les champs électriques donnés seront uniformes. Dans le cas contraire, on aura l'expression du champ et il faudra faire avec.

1) Équation du mouvement

On étudie le système q de masse m dans le référentiel terrestre supposé Galiléen. Bilan des forces:

- Poids, que l'on néglige
- Force électrique: $\vec{f} = q\vec{E}$

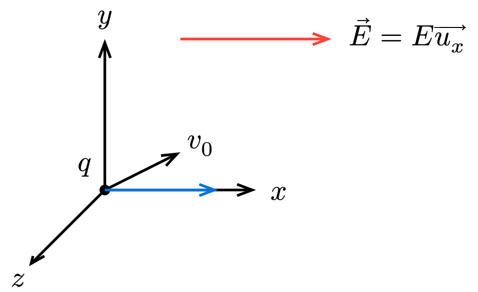
On applique le principe fondamental de la dynamique:

$$m\vec{a} = q\vec{E} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Si $\vec{E}$ est uniforme, l'accélération sera constante.

2) Étude de la trajectoire

On considère une particule de vitesse initiale dans le plan x, y:



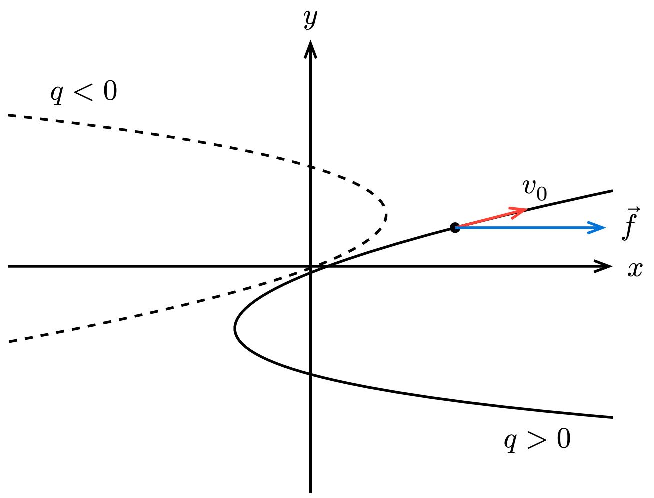
$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{q}{m}E \text{ constante} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{q}{m}Et + v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = v_0 \sin\alpha \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0 \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha \equiv 0[\pi], \text{on obtient une trajectoire rectiligne}$$

$$\text{Sinon, la trajectoire est courbée:}$$



3) Accélération d'une particule chargée par un champ électrique

On va étudier l'accélération subie par une particule dans un champ, c'est à dire qu'on s'intéresse à la variation du module de la vitesse. On utilise donc un raisonnement énergétique.

On sait que la force électrique est une force conservative (par parachutage du résultat de deuxième année).

On a donc:

$$\vec{F} = -\,\mathrm{grad}(E_p) \text{ avec } E_p = \underbrace{qV}_{\text{potentiel électrique}} + \text{constante}$$

On n'a que des forces conservatives, donc par théorème de l'énergie mécanique:

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante}$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = -\Delta(qV + \text{constante}) = -q\Delta V$$

> Φ Note:
> ΔV, c'est la différence de potentiel, autrement dit la tension u.

$$\Delta E_c = -qu$$

Si le champ éléctrique n'est pas nul, ΔE_c sera forcément non-nul, donc la particule sera soit accélérée, soit chargée.

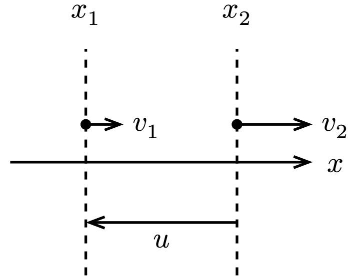
Autrement dit, si la particule entre dans le champ magnétique en x_1 avec une vitesse v_1 et ressort en x_2, alors elle ressortira avec une vitesse v_2 soit plus grande soit plus petite que v_1.

On a $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\, V$,

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

Donc $V = -Ex + \text{constant}$,

$$u = V_1 - V - 2 = -E(x_1 - x_2)$$



Si on fait l'hypothèse que la vitesse initiale est nulle ($v(t = 0) = 0$), on pose v_f la vitesse finale, alors on a:

$$\frac{1}{2}m(v_f)^2 = -qU$$

$$v_f = \sqrt{\frac{-2qu}{m}} \text{ si } q \text{ et } u \text{ sont de signe différent, on prend l'opposé sinon}$$

4) Déviation d'une particule chargée par un champ électrique

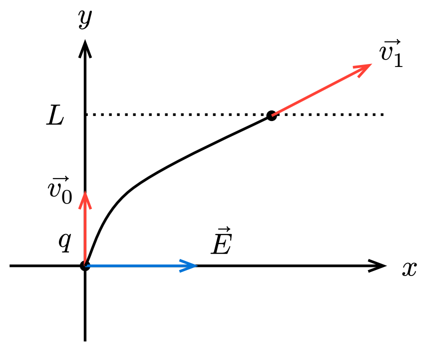
On fait l'hypothèse d'une vitesse initiale v_0 perpendiculaire au champ électrique, limité à la distance L. On se place dans le plan x, y:

On pose les équation horaires:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qE}{m} \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{qE}{m}t \\ \dot{y} = v_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{qE}{2m}t^2 \\ y = v_0 t \end{cases}$$



On pose θ la déviation entre $\vec{v_0}$ la vitesse initiale et $\vec{v_1}$ la vitesse finale.

$$\tan\theta = \frac{\ddot{x_1}}{\dot{y_1}}$$

On pose t_1 le temps de sortie:

$$\tan\theta = \frac{qEt_1}{mv_0}$$

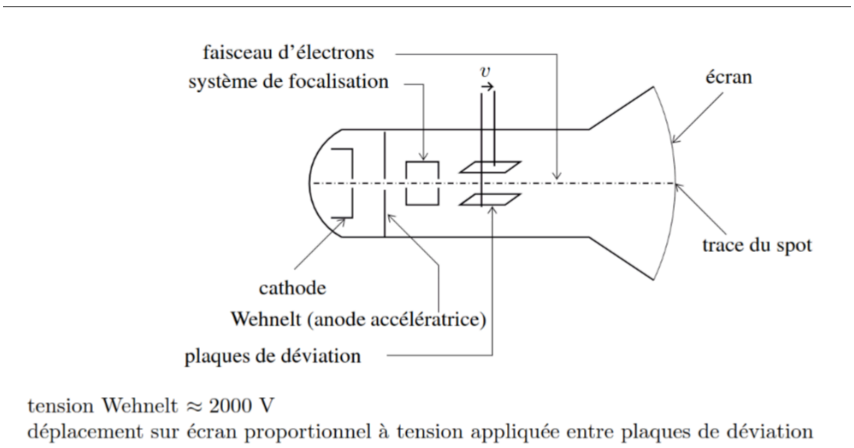
y_1 est l'ordonnée de la fin du champ, donc:

$$y_1 = L = v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L}{v_0}$$

Donc

$$\boxed{\tan\theta = \frac{qEL}{mv_0^2}}$$

5) Application pratique: oscilloscope analogique



III. Mouvement dans un champ magnétique

On étudie le système q de masse m, on se place dans le RefTerGal, on fait un bilan des forces:

- Le poids qui est négligeable
- La force de Lorenz $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

1) Travail de la force magnétique - Mouvement uniforme

On calcule le travail élémentaire:

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= \left(q\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or le produit vectoriel de $\vec{v}$ et $\vec{B}$ est par définition perpendiculaire à $\vec{v}$.

Donc $\delta W = 0$, le travail est nul.

On applique le théorème de l'énergie cinétique:

$$\Delta E_c = W\left(\vec{f}\right) = 0 \Rightarrow E_c \text{ constante}$$

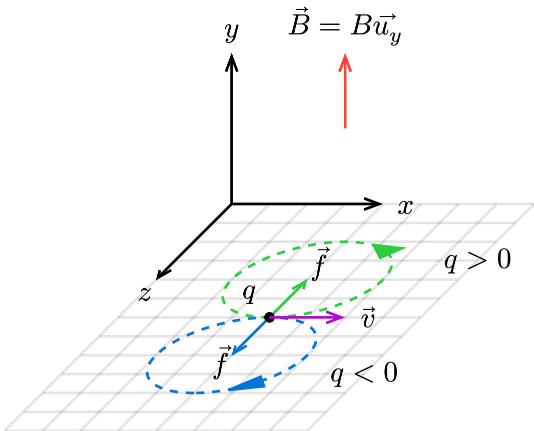
Donc le module de la vitesse restera constant.

Une particule chargée dans un champ magnétique exhibe donc un mouvement uniforme.

Φ Note:
Si l'on veut accélérer une particule chargée, il faudra donc nécesseraiment la mettre dans un champ $\vec{E}$...

2) Étude de la trajectoire circulaire perpendiculairement au champ magnétique

On considère une particule se déplaçant dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$.



On applique le principe fondamental de la dynamique:

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Comme le module de la vitesse va rester constant, on aura $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.
Ainsi, exprimer $\vec{a}$ dans la base de Frenet:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n}$$

Nous permet de dire que:

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n}$$

On sait que $\vec{v} = v\vec{u_t}$

En revenant, sur le PFD, on a:

$$m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Par hypothèse, $\vec{B} \perp \vec{u_t}$, et comme $\overrightarrow{u_n}$ résulte d'un produit vectoriel avec $\vec{B}$, on a $\vec{B} \perp \overrightarrow{u_n}$.

On projette donc sur $\overrightarrow{u_n}$:

$$m\frac{v^2}{R} = |q|vB$$

On en déduit que R, le rayon de courbure est une constante:

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

$$\boxed{\text{Donc la particule suit une trajectoire circulaire.}}$$

Comme on suit un trajectoire circulaire, on peut poser ω la vitesse angulaire, et on a par définition:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ avec } T \text{ la période de rotation}$$

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{T}$$

Donc T la période de rotation vaut:

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

En substituant R:

$$T = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

Dans le cas d'un champ magnétique, la vitesse angulaire ω est aussi appellée **pulsation synchrotron**:

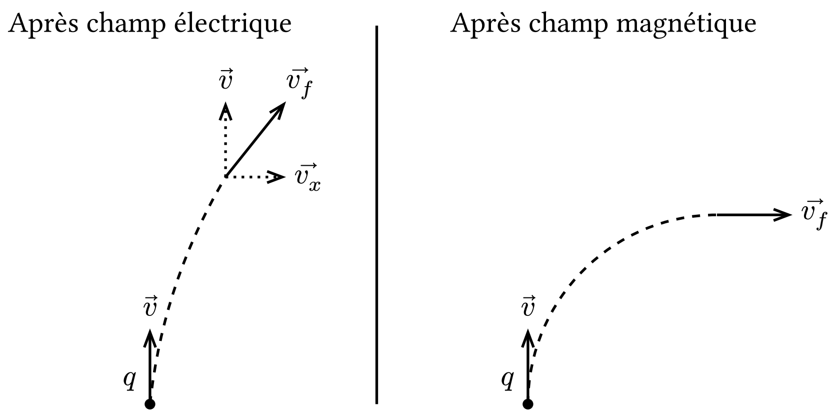
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{|q|B}{m}$$

✓ Tip:
Le sens de la rotation dépend du signe de q: en regardant le produit vectoriel entre $\vec{v_0}$ et $\vec{B}$, le cercle part vers la main droite si q est positif et vers la main gauche si q est négatif. (voir schéma)

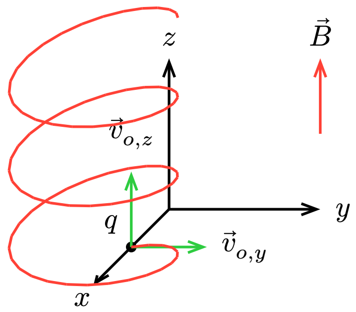
3) Déviation d'une particule chargée par un champ magnétique

À force équivalente, la déviation par un champ magnétique sera plus forte que par un champ électrique, car le champ magnétique va modifier la direction du vecteur vitesse, alors que le champ électrique va ajouter une composante au vecteur vitesse.

On ne pourra jamais suivre une trajectoire circulaire avec un champ électrique constant.



4) Cas où $\vec{v}_0$ en partie sur la direction de $\vec{B}$



IV. Mouvement dans le champ électromagnétique, applications

1) Expérience de Thomson

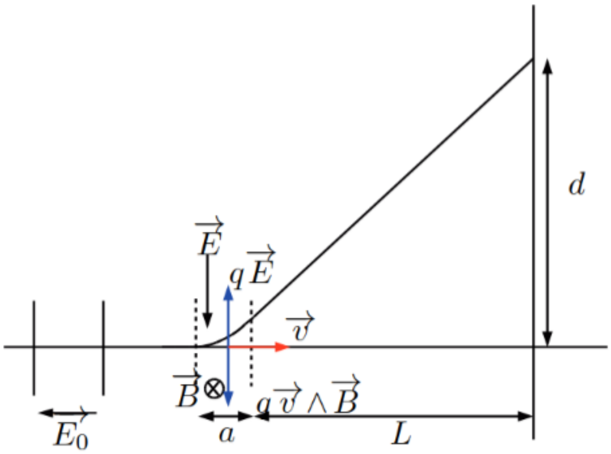


Fig. 7. – Expérience de Thomson

On lance une particule au début du dispositif.
Dans la zone $\vec{E_0}$, on applique un champ électrique pour accélerer la particule.

Dans le premier temps de l'expérience, dans la zone a (entre les pointillés), on n'applique **pas** le champ magnétique $\vec{B}$, seulement le champ électrique $\vec{E}$.

Le champ électrique $\vec{E}$ va dévier les électrons d'un certain angle θ, et les électrons vont atterir sur l'écran à une certaine hauteur d.
En supposant $a \ll L$, la trajectoire de l'électron à partir de la zone a est à peu près un triangle rectangle, et on a donc:

$$\tan\theta \approx \frac{v_y}{v} = \frac{qEa}{mv^2} = \frac{d}{L}$$

(On note v la vitesse horizontale après la zone a et v_y la vitesse verticale après la zone a. Pour récupérer v_y, faire un PFD et intégrer)

Dans le second temps de l'expérience, on applique le champ magnétique $\vec{B}$ en même temps que le champ électrique $\vec{E}$.

Donc, une fois arrivés dans la zone a, les électrons seront à la fois affectés par le champ électrique et le champ magnétique.

On va modifier le champ magnétique jusqu'à ce que les deux champs s'annulent complètement (que l'électron suive une ligne droite).

On aura donc $m\vec{a} = qE - qVB = 0$.
En réinjectant, on aura $\dfrac{q}{m} = \dfrac{dE}{aLB^2}$

2) Spectromètre de masse

On peut utiliser les champs électriques et les champs magnétiques pour différencier les isotopes d'un même élément.

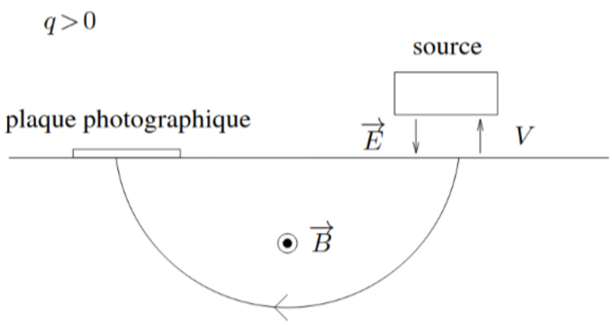
Deux isotopes possèdent un même nombre de protons et d'électrons, donc possèdent une même charge.

Cependant, ils ont un nombre de neutrons différent, et donc une masse différente.

On devra travailler avec des ions (chargés positivement) pour pouvoir les accélerer avec des champs électromagnétiques.

On commence par accélerer les ions avec un champ électrique constant $\vec{E}$. Les ions sortent avec une vitesse:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2|q|V}{m}}$$



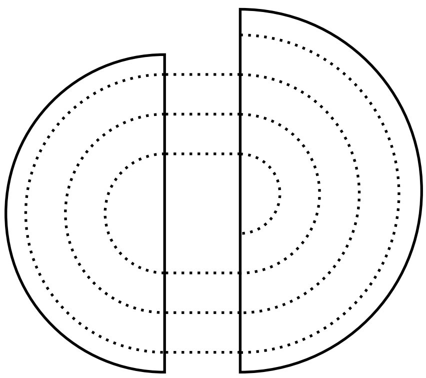
On applique ensuite un champ magnétique qui va courber les ions sortant de la source. En exprimant le rayon de courbure, on trouve:

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{|q|}}$$

Donc le rayon de courbure dépend de la masse: on peut séparer les différents isotopes en fonction de leur zone d'impact sur la plaque photographique.

3) Cyclotron

Les cyclotrons ont pour objectif d'accélerer des particules chargées élémentaires.



Ça va vite!