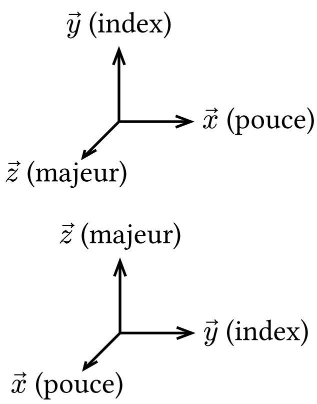
Complément Chapitre 2 - Le produit vectoriel

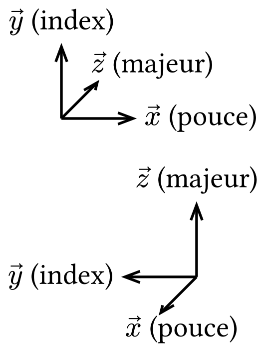
I. Orientation de l'espace

Deux bases possibles:

Direct (main droite)



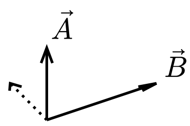
Indirect (main gauche)



II. Produit vectoriel

On définit le produit vectoriel comme l'opérateur $\wedge$ qui à deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ associent le vecteur $\vec{A} \wedge \vec{B}$ qui est:

1. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont pas colinéaires
   - Perpendiculaire au plan formé par $\left(O, \vec{A}, \vec{B}\right)$
   - Tel que $\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B}\right)$ forme une base directe
   - De magnitude $\sin\left(\left(\vec{A}, \vec{B}\right)\right) \left\|\vec{A}\right\| \left\|\vec{B}\right\|$
2. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires: $\vec{A} \wedge \vec{B} = 0$



Le produit vectoriel est anti-commutatif:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\left(\vec{B} \wedge \vec{A}\right)$$

Il est associatif/commutatif avec la multiplication externe (pour $k \in \mathbb{R}$):

$$\left(k\vec{A}\right) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge \left(k\vec{B}\right) = k\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)$$

Il est distributif (à gauche et à droite) par rapport à l'addition:

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) + \left(\vec{A} \wedge \vec{C}\right)$$

Calcul du produit vectoriel: Pour $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Moyen mémotechnique: ça ressemble à la formule du déterminant, en utilisant les composants externes:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x' & x \\ z' & z \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

⚠ Warn:
Attention à la ligne du milieu

Preuve: horrible

III. Application au mouvement circulaire

On introduit le vecteur rotation $\vec{\omega}$, avec $\|\omega\|$ la vitesse angulaire ω, et colinéaire à $\vec{u_z}$

On peut alors exprimer la vitesse: $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\vec{u_z} \wedge \vec{u_r} = r\omega\vec{u_\theta} = \vec{v}$

1) Expression de l'accélération

On dérive:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{r} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \\ &= \ddot{\theta}\vec{u_z} \wedge R\vec{u_r} + \dot{\theta}\vec{u_z} \wedge \vec{v} \\ &= R\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{\theta}\vec{u_z} \wedge R\dot{\theta}\vec{u_\theta} \\ &= R\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{u_r} \end{aligned}$$

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, l'accélération est orthogonale à la vitesse:

$$\vec{a} = \vec{v} \wedge \vec{r}$$