Cinématique

I. Description cinématique

1) Référentiel et temps absolu

Référentiel: Un repère pour se repérer dans l'espace, et une horloge pour mesurer le temps.

> ⚠ Warn:
> La base peut-être variable. Ce qui compte, c'est l'observateur.
> Par exemple, la Terre, ou un vélo.

2) Position, équations horaires, trajectoires

Position: Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ d'un point. On peut bien sûr l'écrire dans n'importe quelle base:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}\\ &= r(t)\overrightarrow{u_r} + \theta(t)\overrightarrow{u_\theta} + z(t)\overrightarrow{u_z}\\ &= r(t)\overrightarrow{u_r} + \theta(r)\overrightarrow{u_\theta} + \varphi(t)\overrightarrow{u_\varphi}\end{aligned}$$

Équations horaires: Système d'équations décrivant l'évolution de la vitesse par rapport au temps:

$$\begin{cases}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{cases} \text{en cartésien,} \quad \begin{cases}r(t)\\ \theta(t)\\ z(t)\end{cases} \text{en cylindrique,} \quad \begin{cases}r(t)\\ \theta(t)\\ \varphi(t)\end{cases} \text{en sphérique}$$

Équations de trajectoire: Système d'équations indépendantes du temps décrivant la trajectoire d'un point.

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= 0 \text{ en cartésien}\\ g(r,\theta,z) &= 0 \text{ en cylindrique}\\ h(r,\theta,\varphi) &= 0 \text{ en sphérique}\end{aligned}$$

On cherchera en général à obtenir les équations de trajectoire avec les équations horaires.

3) Vitesse

Vitesse: Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{/R}}(M) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ (avec R le référentiel)

4) Accélération

Accélération: Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_{/R}}(M) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{/R}}(M)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$

II. Expression de la vitesse et de l'accélération

1) Coordonées cartésiennes

On a:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

Pour récuperer les coordonées de la dérivée, on peut dériver les coordonnées du vecteur position individuellement (car les coordonées de la base ne dependent pas du temps)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{/R}}(M) &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z} \\ &= \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

On remarque que $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est le déplacement élémentaire. La vitesse est un déplacement élémentaire effectué pendant un intervalle de temps infinitésimal.

De même:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{/R}}(M) &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_z} \\ &= \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

2) Coordonées cylindriques

On utilise le déplacement élémentaire:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

> ⚠ Warn:
> Si on utilise cette méthode de démonstration pour la dérivée de la vitesse, il faut redémontrer le déplacement élémentaire (voir Chapitre 1)

Pour obtenir la vitesse, on divise par $\mathrm{d}t$:

$$\overrightarrow{v_{/R}}(M) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

Sinon, on peut partir directement du vecteur position, et on le dérive:

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z} \text{ (on ne met pas de } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_z}}{\mathrm{d}t} \text{ car le vecteur z ne change pas)}$$

On a:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ &= \overrightarrow{u_\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{u_\theta}\dot{\theta}\end{aligned}$$

⚠ Warn:
Démonstration à faire sur copie, on l'a déjà faîte au Chapitre 1

D'où:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}$$

Pour l'accélération, on dérive à nouveau:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}\right) \\ &= \ddot{r}\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\vec{u_r}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\dot{\vec{u_\theta}} + \ddot{z}\vec{u_z} \\ &= \vec{u_r}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \vec{u_\theta}\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) + \ddot{z}\vec{u_z}\end{aligned}$$

3) Coordonées sphériques

On va récuperer la vitesse avec le déplacement élémentaire (et on va pas tout dériver parce que 💀)

On a:

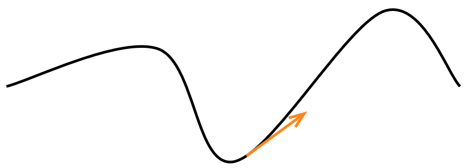
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u_\varphi}$$

4) Coordonnées intrinsèques = Base de Fresnel

La vitesse est sur le vecteur tangent (car la vitesse est tangente à la trajectoire):

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{u_t}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{u_t} + \dot{s}\dot{\vec{u_t}}$$



On a:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_t}}{\mathrm{d}r} = \vec{u_r}$$

Avec $\mathrm{d}r$ l'angle sur le cercle approximant la trajectoire localement (courbure)

$$\kappa = \frac{\det(\vec{v}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u_t}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \vec{u_r}\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

Avec $\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}s}{R}$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{u_t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{u_r}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R}$$
$$= \ddot{s}\vec{u_t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{u_r}$$

Dans une trajectoire circulaire:

$$\vec{u_t} = \vec{u_\theta}$$

$$\vec{u_r} = -\vec{u_r}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\dot{s} = v$$

$$\ddot{s} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u_\theta}}_{2} - \underbrace{\frac{v^2}{R}\vec{u_r}}_{1}$$

On dit hassoul les coordonées de Fresnel enfait c'est des coordonnées polaires:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u_\theta}$$

Si on est sur une trajectoire circulaire:

$$r = R$$

$$\vec{a} = \underbrace{-R\dot{\theta}^2\vec{u_r}}_{1} + \underbrace{R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}}_{2}$$

On identifie entre 1 et 2

III. Exemples de mouvements

1) Mouvement rectiligne

Mouvement le long d'une droite.

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u_x}$$

Attention au piège «Mouvement rectiligne sinusoïdale»:
C'est que

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$$

$$\dot{x} = -\omega X\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 X\cos(\omega t + \varphi)$$

2) Mouvement à accélération constante

On a $\vec{a}$ un vecteur constant qu'on note $\vec{a_0}$.

On a donc:

$$\vec{v} = \int \vec{a} = \vec{a_0}t + \vec{v_0}$$

Si $\vec{v_0}$ et $\vec{a_0}$ sont colinéaires, on aura une trajectoire rectiligne (dans l'axe de $\vec{a_0}$ et $\vec{v_0}$).
Sinon, on se déplacera dans le plan défini par ces deux vecteurs.

3) Mouvements uniforme, accéléré, décéléré

Un mouvement est dit:
- **Uniforme**: si le module de la vitesse reste constant
- **Accéléré**: si le module de la vitesse est croissant
- **Décéléré**: si le module de la vitesse est décroissant

Dans le cas rectiligne:
- Si le mouvement est uniforme, $\vec{v}$ aura une direction et une magnitude constante, donc l'accélération sera nulle
- Si le mouvement est accéléré, l'accélération est dans le même sens que le vecteur vitesse ($\vec{a} \cdot \vec{v} = \|\vec{a}\|\|\vec{v}\| > 0$)
- Si le mouvement est décéléré, l'accélération est opposé au vecteur vitesse ($\vec{a} \cdot \vec{v} = \|\vec{a}\|\|\vec{v}\| < 0$)

4) Mouvement circulaire

Avec une trajectoire circulaire, on est dans un plan. On utilise les coordonées polaires.

En prenant le centre du cercle comme centre de la trajectoire, on a l'équation de trajectoire:

$$r = R$$

On connait les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u_\theta}$$

Or:

$$r = R \Rightarrow \dot{r} = 0 \text{ et } \ddot{r} = 0$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Mouvement circulaire uniforme: On a $\|\vec{v}\| = c$ avec c une constante, donc:

$$R\left|\dot{\theta}\right| = c$$

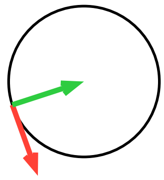
$$\left|\dot{\theta}\right| = \frac{c}{R}$$

$$\dot{\theta} = \frac{c}{R} \text{ par continuité}$$

Donc $\ddot{\theta} = 0$, donc:

$$\vec{a} = \underbrace{-R\dot{\theta}^2\vec{u_r}}_{\text{constant}}$$

On aura une accélération « centripète » constante:



IV. Caractère relatif du mouvement - Changement de référentiel