Intrøductiøn à la mécåníqũė
Systèmes de Coordonées

I. Bref historique

II. Objet de la mécanique

1) Quelques définitions

- **Cinématique**: Description, analyse des mouvements, sans s'intéresser aux causes de ce mouvement.
- **Dynamique**: Étude des causes du mouvement: notion de force et d'action mécanique
  - **Statique**: Étude des équilibres en l'absence de mouvement

2) Cadre de la mécanique newtonienne

a) Unités

- **Mètre**: Distance parcourue par la lumière en $\frac{1}{c}$ seconde.
- **Seconde**: Horloge atomique

b) Hypothèse de la mécanique newtonienne

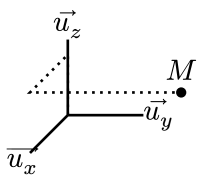
On considèra que:
- La précision de la position et de la vitesse est illimité et absolue.
  - (Faux car principe d'incertitude quantique mais négligeable à l'échelle macroscopique)
- Le temps avance à la même vitesse partout
  - (Faux car relativité restreinte, mais négligeable à l'échelle macroscopique)
- Espace euclidien = La somme des angles d'un triangle vaut 180°, l'espace est plat
  - (Faux car torsion de l'espace-temps)
- Le temps et l'espace sont continus
  - (Faux car quantisation)

III. Systèmes de coordonnées

Un système de coordonnée permet de se repérer dans l'espace par rapport à une origine.

1) Coordonnées cartésiennes

On pose un repère orthonormé $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$



On peut atteindre le point M avec ses coordonées: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$

On peut faire varier les coordonnées de M dans les trois directions élémentaires.

Déplacement élémentaire:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

En faisant varier $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$.
On obtient un parallépipède de coté $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$. On appelle le volume de ce parallépipède le volume élémentaire:

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Ce parallépipède possède 3 faces élémentaire:
- Une perpendiculaire à $\overrightarrow{u_x}$, de surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}S_x$
- Une perpendiculaire à $\overrightarrow{u_y}$, de surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}S_y$
- Une perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$, de surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}S_z$

2) Coordonées cylindriques

Lorsque notre système tourne autour d'un point fixe, il sera souvent beaucoup plus simple d'utiliser directement un repère cylindrique, plutôt que des coordonées cartésiennes.

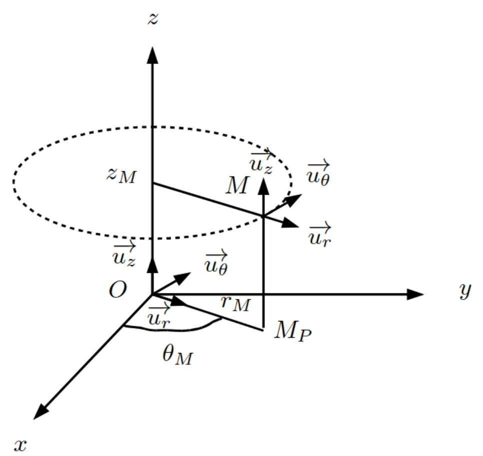
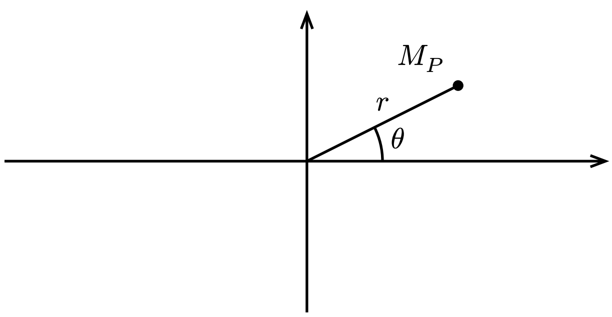


Fig. 2. – Repère cylindriques

On va regarder ce qui se passe dans le plan $\vec{x}\vec{y}$.

On prend M_P le projeté orthogonal de M dans le plan $\vec{x}\vec{y}$



On prend la distance OM_P dans ce plan, ainsi que l'angle θ entre $\overrightarrow{OM_P}$ et le vecteur $\vec{x}$

Coordonées cylindriques:

- $r \to$ La distance OM_P (qui est positive)
- $\theta \in [0; 2\pi[$
- z, la hauteur, la même que dans les coordonées cartesiennes

Autrement dit, on utilise des coordonnées polaires pour x et y, et des coordonées cartésiennes pour z.

a) Conversion depuis les coordonées cartésiennes

On a:

$$r = OM_P = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \text{ si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \text{ si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi \text{ si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

$$z = z$$

b) Conversion vers coordonées cartésiennes

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

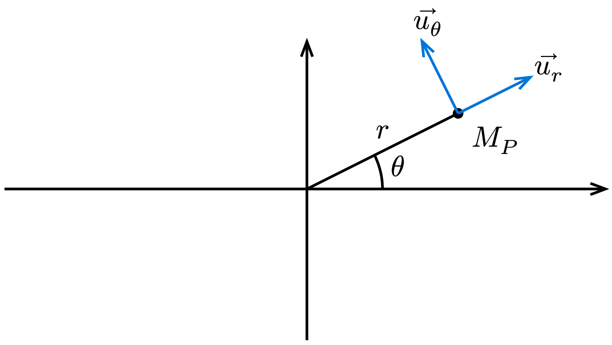
c) Base mobile

On se place dans les coordonées polaires.

On a la base du repère polaire $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$

On va prendre la base locale du point M_P. On pose $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire $\widehat{OM_P}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ son vecteur orthogonal unitaire (afin de former une base orthonormé), qu'on prendre dans le sens trigonométrique.

$$\begin{cases} u_r = \vec{x}\cos\theta + \vec{y}\sin\theta \\ u_\theta = -\vec{x}\sin\theta + \vec{y}\cos\theta \end{cases}$$



On obtient une nouvelle base de l'espace: $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$

N'importe quel point/vecteur possède une représentation dans cette base et dans la base cartésienne:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x \overrightarrow{u_x} + a_y \overrightarrow{u_y} + a_z \overrightarrow{u_z} \\ &= a_r \overrightarrow{u_r} + a_\theta \overrightarrow{u_\theta} + a_z \overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a_r}$: Composante radiale
$\boldsymbol{a_\theta}$: Composante orthoradiale

On peut enfin représenter $\overrightarrow{OM}$ dans cette base:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_P} + \overrightarrow{M_P M}$$

$$\overrightarrow{OM_P} = r\overrightarrow{u_r} + 0 \times \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$$

‼ Caution:
Et non pas $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + \theta\overrightarrow{u_\theta} + z\overrightarrow{u_z}$

Le θ est « caché » dans u_r, la base est mobile.

On peut passer de la base cylindrique vers la base cartésienne:

$$\{\overrightarrow{u_x} = \cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

d) Déplacement élémentaire

- Pour passer de x à $r + \mathrm{d}r$, le point M s'est déplacé sur OM_P de $\mathrm{d}r$ dans le sens de u_r, d'où un déplacement de $\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}$
- Pour passer de z à $z + \mathrm{d}z$, le point M subit une translation de $\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$
- Pour passer de θ à $\theta + \mathrm{d}\theta$, le point M_P subit une rotation d'axe $(O, \vec{z})$, donc:
  - La distance parcourue vaut $r\,\mathrm{d}\theta$ dans la direction $\overrightarrow{u_\theta}$, d'où: $r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$

On a donc:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

e) Volume élémentaire

On peut encore apparenter notre déplacement à un mini parallépipède.

On obtient un volume élémentaire:

$$\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

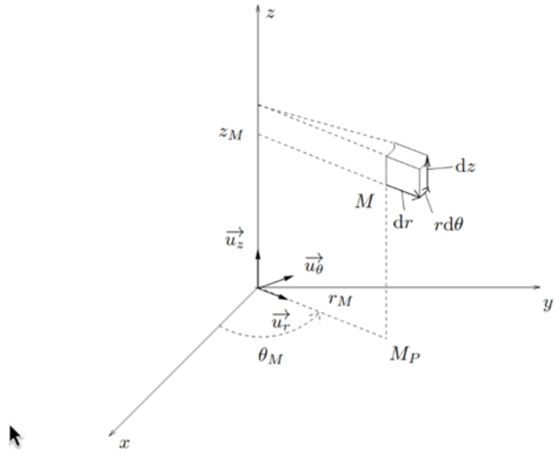


Fig. 5. – Volume élémentaire dans un repère cylindrique

On peut aussi définir des surfaces élémentaires:
- $\mathrm{d}S_r \perp \vec{u_r}$ avec $\mathrm{d}S_r = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$
- $\mathrm{d}S_\theta \perp \vec{u_\theta}$ avec $\mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$
- $\mathrm{d}S_z \perp \vec{u_z}$ avec $\mathrm{d}S_z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

3) Coordonnées sphériques

> Φ Note:
> Convention:
>
> ⦿ Vecteur pointant vers nous
>
> ⊗ Vecteur pointant à l'opposé

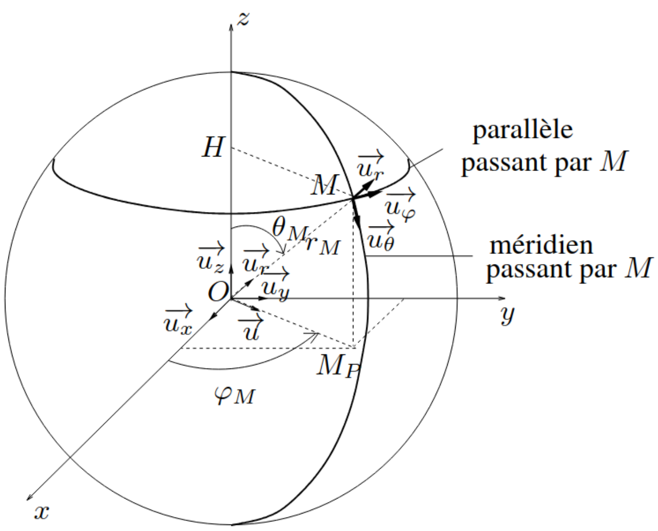


Fig. 6. – Repère sphérique

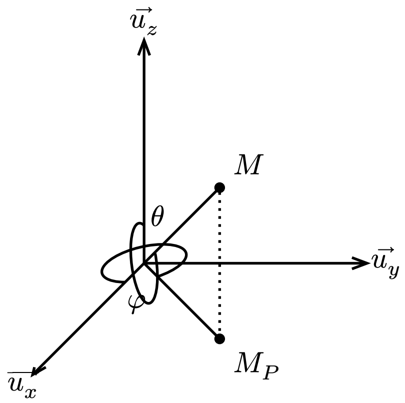
On va directement définir r comme la distance OM:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

> ‼ Caution:
> L'angle θ des coordonnées sphériques n'a rien à voir avec l'angle θ des coordonnées cylindriques

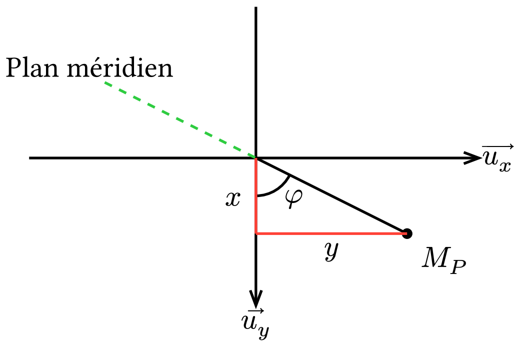
On projete M sur le plan $\vec{x}\vec{y}$ pour obtenir M_P

On a:
- φ l'angle entre $\vec{x}$ et $\overrightarrow{OM_P}$, avec $\varphi \in [0; 2\pi[$
- θ l'angle entre $\vec{z}$ et $\overrightarrow{OM}$, avec $\theta \in [0; \pi[$

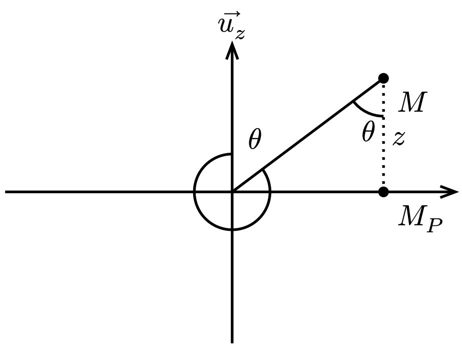


a) Conversion en coordonées cartésiennes

On s'intéresse aux plans:
- $\vec{u_x}\vec{u_y}$, le plan équatorial



- OM_PM, le plan méridien



Ce qui nous donne:
- Dans le plan équatorial:

$$\cos\varphi = \frac{x}{OM_P} = \frac{x}{r\sin\theta}$$
$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{OM_P} = \frac{y}{r\sin\theta}$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$

- Dans le plan méridien:

$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$
$$z = r\cos\theta$$

b) Conversion vers coordonées sphériques

On a, assez simplement:

$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pour trouver les angles, on utilise les fonctions trigonométriques réciproques:
- Pour θ:
  - Avec le cos:

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

  - Avec la tan:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{OM_P}{z}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

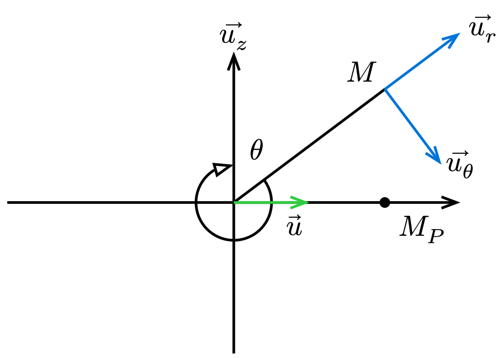
- Pour φ:
  - $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{r\sin\varphi\sin\theta}{r\cos\varphi\sin\theta} = \dfrac{y}{x}$

c) Base mobile

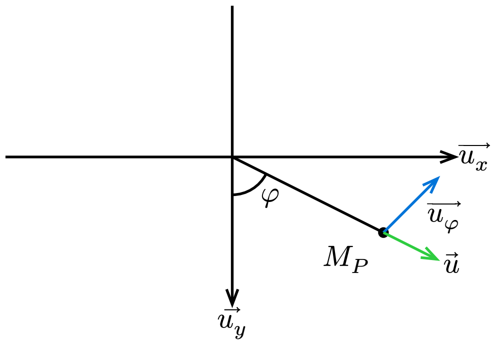
On pose la base $\left(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$:

On pose aussi le vecteur « joker » $\vec{u}$, qui est orthogonal à $\overrightarrow{u_\varphi}$ dans le plan équatorial, et qui simplifie le calcul des vecteurs de la base.

$\vec{u_\theta}$ va dans le même sens que θ, et $\overrightarrow{u_\varphi}$ va dans le même sens que φ.



Le vecteur orthogonal à $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ est orthogonal au plan méridien:



On a donc:

$$\vec{u} = \cos\varphi \vec{u_x} + \sin\varphi \vec{u_y}$$

$$\vec{u_\varphi} = -\sin\varphi \vec{u_x} + \cos\varphi \vec{u_y}$$

$$\begin{aligned}\vec{u_r} &= \cos\varphi \vec{u_z} + \sin\theta \vec{u} \\ &= \cos\varphi \vec{u_z} + \sin\theta\cos\varphi \vec{u_x} + \sin\theta\sin\varphi \vec{u_y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u_\theta} &= -\sin\theta \vec{u_z} + \cos\theta \vec{u} \\ &= -\sin\theta \vec{u_z} + \cos\theta\cos\varphi \vec{u_x} + \cos\theta\sin\varphi \vec{u_y}\end{aligned}$$

d) Déplacement élémentaire

Le déplacement par rapport à r est plutôt simple:

$$r \longrightarrow r + \mathrm{d}r \Leftrightarrow \mathrm{d}r\vec{u_r}$$

Le déplacement par rapport à θ se rapporte à se déplacer de θ sur le cercle de centre O de rayon r (la coupe de la sphere par le plan méridien), d'où:

$$\theta \longrightarrow \theta + \mathrm{d}\theta \Leftrightarrow r\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta}$$

Le déplacement par rapport à φ se rapport à déplacer M_P sur le cercle de centre O, et de rayon $OM_P = r\sin\theta$ (le rayon est plus petit si on se rapproche des pôles et plus grand si on se rapproche de l'équateur), d'où:

$$\underbrace{r\sin\theta}_{\text{rayon}}\,\underbrace{\mathrm{d}\varphi}_{\text{angle}}$$

Un rayon $\times$ un angle est une distance, et elle est parcourue dans la direction de $\vec{u_\varphi}$:

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \mathrm{d}\varphi \Leftrightarrow r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u_\varphi}$$

On obtient donc le déplacement élémentaire:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u_\varphi}$$

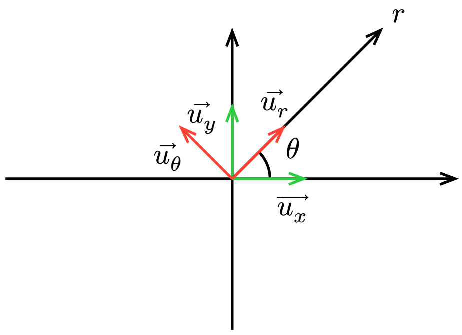
$$\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Et les surfaces perpendiculaires:
- $\mathrm{d}S_r = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$
- $\mathrm{d}S_\theta = r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
- $\mathrm{d}S_\varphi = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

IV. Dérivée d'un vecteur unitaire tournant par rapport à son angle de rotation

1) Cas des coordonées polaires

On se place en coordonées polaires:



$$\begin{cases} \vec{u_r} = \cos\theta \vec{u_x} + \sin\theta \vec{u_y} \\ \vec{u_\theta} = -\sin\theta \vec{u_x} + \cos\theta \vec{u_y} \end{cases}$$

On dérive $\vec{u_r}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \vec{u_x} + \cos\theta \vec{u_y} = \vec{u_\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta \vec{u_x} - \sin\theta \vec{u_y} = -\vec{u_r}$$

Dériver le vecteur unitaire polaire correspond à le faire tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$

2) Cas général

On prend $\hat{u}$ un vecteur unitaire, tournant d'un angle α

On cherche $\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\alpha}$

On a $\hat{u}$ unitaire, donc:

$$\|\hat{u}\|^2 = 1 = \hat{u} \cdot \hat{u}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\ \|\hat{u}\|^2}{\mathrm{d}\alpha} &= \hat{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \hat{u} \\ &= 2\hat{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\alpha} \\ &= \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Donc:

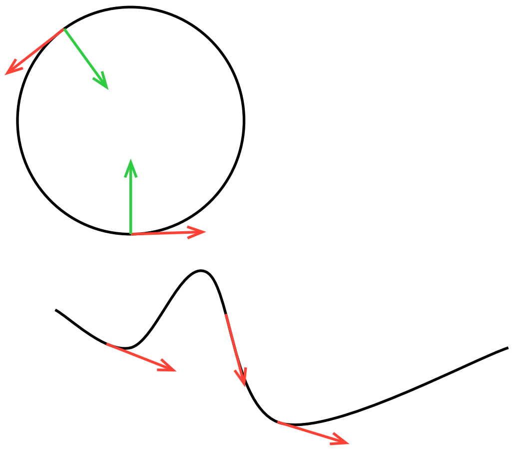
$$\hat{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

$\hat{u}$ est un vecteur unitaire, donc ne peut pas être nul.
Donc la dérivée d'un vecteur unitaire sera forcément orthogonal à ce vecteur.

3) Base de Frenet

Base de Frenet: Quatrième solution pour se repérer dans l'espace, liée à la trajectoire que l'on va suivre.
On définit l'abscisse curviligne comme la distance sur la trajectoire que l'on suit.
On définit alors un vecteur unitaire $\vec{u_t}$ qui va suivre la trajectoire, et un vecteur normal $\overrightarrow{u_n}$ orthogonal à $\vec{u}_t$. Le vecteur normal devera toujours pointer vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

Das le cas circulaire, on a donc $\vec{u_t} = \vec{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_n}$



On a:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{R}$$

Avec R le rayon de courbure.