¿ Intrøductiøn à la mécåníqūė qûȧntique ?

1. Dualité onde corpuscule 1
2. Fonction d'onde et probabilité 4
3. Quantification de l'énergie 4

I. Dualité onde corpuscule

1) Lumière et onde

On associe habituellement la lumière à une onde.

La fréquence de cette onde caractérise l'énergie et le type de lumière.

2) Effet photoélectrique

On pose une plaque de zinc initialement chargée positivement.

En dessous, on pose l'électroscope qui permet de détecter des charges de même signe.

En éclairant le zinc, on arrache des électrons au zinc (ce qu'on observe sur l'électroscope).

On place ce dispositif dans un circuit et on mesure l'intensité.

L'intensité mesurée augmente avec l'intensité lumineuse.

La fréquence impact l'effet photoélectrique. On observe un seuil de fréquence en-dessous duquel aucun effet photoélectrique est observé. De plus, l'augmentation de la fréquence ne cause pas plus d'arrachage, toute l'énergie d'un photon est transmis à l'électron (sous la forme d'énergie cinétique).

L'énergie d'un photon est ammené « par paquet »: ces paquets (quanta) d'énergie sont indivisibles (un même photon ne peux pas arracher deux électrons) et non accumulable (deux photons ne peuvent pas s'ajouter pour arracher un électron).

Pour pouvoir arracher un électron, l'énergie apportée par la lumière $E = h\nu$ doit être supérieur à W_0 l'énergie nécessaire pour arracher l'électron.

ϕ Principe:

1. L'effet photoélectrique ne se produit qu'au-delà d'une fréquence seuil ν_0 dont la valeur dépend du métal
2. L'émission est quasi-instantanéé même à faible intensité lumineuse
3. L'énergie cinétique des photoélectrons ne dépend pas de l'intensité lumineuse mais uniquement de la fréquence de rayonnement

3) Notion de photon

On définit le **photon** comme étant une particule de masse nulle, se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le vide.

On lui associe une énergie $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ avec $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \quad \mathrm{J \cdot S}$ la constante de Planck et ν la fréquence de l'onde associée.

On lui associe aussi une quantité de mouvement p. Seulement, la quantité de mouvement classique n'est valide que dans un cadre non relativiste. On utilise donc l'énergie relativiste:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

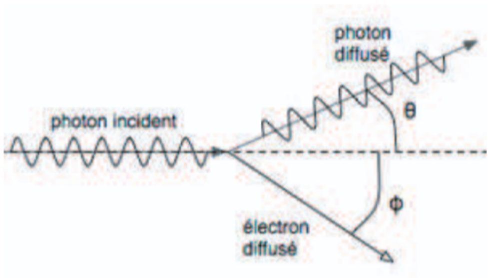
Dans le cas du photon ($m = 0$):

$$E^2 = p^2c^2 \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

4) Absorption et émission de photons

Les atomes ont des niveaux discrets d'énergie entre les électrons, et l'énergie d'un photon doit correspondre exactement à ce niveau pour être émis ou absorbé, d'où l'apparition de raies à des fréquences spécifiques.

5) Compléments - Effet Compton



On utilise (dans le cadre relativiste):

- La conservation totale de l'énergie:

$$E_{\text{photon incident}} + E_{\text{e}^- \text{ au repos}} = E_{\text{photon diffusé}} + E_{\text{e}^- \text{ diffusé}}$$

$$\boxed{hv + m_ec^2 = hv' + \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}}$$

- La conservation de la quantité de mouvement:

$$p_{\text{photon incident}} + p_{\text{e}^- \text{ au repos}} = p_{\text{photon diffusé}} + p_{\text{e}^- \text{ diffusé}}$$

$$\boxed{\frac{h}{\lambda}\vec{u} = \frac{h}{\lambda'}\vec{u}' + \vec{p}_{\text{e}^- \text{ diffusé}}}$$

On récupère la nouvelle quantité de mouvement de l'électron:

$$\vec{p_e} = \frac{h}{\lambda}\vec{u} - \frac{h}{\lambda}\vec{u}'$$

On prend le produit scalaire:

$$p_e^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2\frac{h}{\lambda}\frac{h}{\lambda'}\cos\theta$$

$$p_e^2c^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2} + \frac{h^2c^2}{\lambda'^2} - 2\frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta$$

Par la conservation de l'énergie, on a:

$$\sqrt{p_e^2c^2 + m_e^2c^4} = \left(h\frac{c}{\lambda} + m_ec^2 - h\frac{c}{\lambda'}\right)$$

Donc:

$$p_e^2c^2 + m_e^2c^4 = \left(h\frac{c}{\lambda} + m_ec^2 - h\frac{c}{\lambda'}\right)^2$$

On développe en substituant $p_e^2c^2$:

$$\begin{aligned}\frac{h^2c^2}{\lambda^2} + \frac{h^2c^2}{\lambda'^2} - 2\frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta + m_e^2c^4 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2} + \frac{hc^3m_e}{\lambda} - \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{hc^3m_e}{\lambda} + m_e^2c^4 \\ - \frac{hm_ec^3}{\lambda'} - \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'} - \frac{hm_ec^3}{\lambda'} + \frac{h^2c^2}{\lambda'^2}\end{aligned}$$

$$\frac{2hc}{\lambda}m_ec^2 - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'} - 2\frac{m_ec^2hc}{\lambda'} + \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta = 0$$

$$\frac{hc}{\lambda\lambda'}(\cos\theta - 1) + m_ec^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 0$$

$$\lambda\lambda'\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta)$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta)}$$

6) Onde de matière associée à une particule - Relation de De Broglie

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}$$

On associe donc une longueur d'onde à toute objet selon sa vitesse:

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p}$$

Déterminer la longueur d'onde de De Broglie d'un homme de masse $m = 80$ kg marchant à une vitesse $v = 5{,}0$ km.h^{-1} dans la rue. Conclure sur la possibilité d'observer son caractère ondulatoire.

Déterminer la longueur d'onde de De Broglie pour un électron d'énergie cinétique de 100 keV. Si besoin, on utilisera l'expression de l'énergie cinétique relativiste $Ec = (\gamma - 1)\,mc^2$ et de la quantité de mouvement $p = \gamma mv$ avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

7) Vérification expérimentale

Plusieurs expériences ont permi de vérifier le caractère à la fois corpusculaire et ondulatoire des objets de petite taille:

1. Expérience de Davisson Germer
2. Interférence des électrons

II. Fonction d'onde et probabilité

1) Interférence et probabilité

On définit la **fonction d'onde** par une application de l'espace et du temps dans $\mathbb{C}$.

La probabilité $\mathrm{d}P$ qu'une particule se trouve à l'instant t au sein d'un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ autour d'un point $M(x, y, z)$ vaut le module de la fonction d'onde:

$$\mathrm{d}P(x, y, z, t) = |\psi(M, t)|^2 \,\mathrm{d}\tau$$

2) Inégalité de Heisenberg

a) Inégalité de Heisenberg spatiale

On ne peut pas à la fois connaître parfaitement la position et la vitesse d'un objet. On peut connaître les deux à la fois mais avec une incertitude plus grande. En posant Δx et Δp_x les incertitudes sur la position et sur la quantité de mouvement, ainsi que $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, on a:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

En mécanique quantique, on travaille avec des loi de probabilité plutôt que des directement des valeurs

b) Inégalité de Heisenberg entre énergie et temps

De même:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

c) Exemples

Soit un électron de masse $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg se déplaçant à la vitesse $v = 3{,}0.10^6$ m.s^{-1} autour du noyau d'hydrogène.
En supposant la vitesse connue avec une indétermination $\Delta v_x = 0{,}10.10^6$ m.s^{-1}, déterminer l'indétermination sur la quantité de mouvement et sur la position. Que peut-on en conclure?

Soit un skieur de masse $m = 70$ kg se déplaçant à la vitesse $v_x = 20$ m.s^{-1} (environ 70 km.h^{-1}) avec une imprécision $\Delta v_x = 1{,}5$ m.s^{-1} (soit environ 5 km.h^{-1}). Déterminer l'indétermination sur la quantité de mouvement et sur la position. Que peut-on en conclure?

III. Quantification de l'énergie

1) Notion de quantification

(On verra en deuxiḿe année en résolvant l'équation de Schrodinger)

On parle de quantification si l'ensemble des valeurs atteignables est discret.

2) Spectre de l'atome d'hydrogène

En notant R_H la constante de Rydberg, n et m les niveaux d'énergie de l'atome, on obtient la fréquence de la lumière émise par:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

3) Modèle Plantétaire de Bohr

On fait une analogie avec les planètes (totalement préscientifique?). On considère que les électrons suivent une interaction électrostatique qui s'apparente à la gravité.

On considère le système de l'électron dans le référentiel étudié supposé galiléen. On fait un bilan des forces:
- La force électromagnétique: $\vec{f}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_e q_p}{r^2}\vec{u}_r$

Par le premier principe (actions réciproques):

$$m_p\frac{\mathrm{d}\vec{v}_p}{\mathrm{d}t} = -m_e\frac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\|\vec{v}_p\|}{\|\vec{v}_e\|} = \frac{m_e}{m_p} \ll 1$$

On considère donc que le proton est quasi-immobile par-rapport à l'électron, et on prend le proton P comme origine .

La force $\vec{f}_e$ est donc une force newtonienne. On calcule le moment cinétique et on trouve que l'électron est en mouvement plan autour du proton.

On calcule le moment cinétique:

$$L_P = m_e r^2\dot{\theta}$$

> Parachutage:
>
> $$L_P = n\hbar \text{ selon Bohr}$$

On calcule l'énergie mécanique:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^3 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On fait un PFD:

$$m\vec{a} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\vec{u}_r$$

On fait l'hypothèse des trajectoires circulaires à vitesse uniforme, donc:

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

On projette le PFD sur $\vec{u}_r$:

$$mR\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

On pose:

$$v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m_e}$$

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m_e}}$$

$$L_P = m_e r v = n\hbar$$

$$m_e r\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} = n\hbar$$

$$\sqrt{\frac{e^2 m_e r}{4\pi\varepsilon_0}} = n\hbar$$

Donc:

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{m_e e^2}$$

$$v = \frac{n\hbar}{m_e r} = \frac{n\hbar m_e e^2}{m_e 4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}$$

$$E_m = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2}m_e\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2} - \frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2} \\ &= -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 n^2\hbar^2} \\ &= -\frac{E_1}{n^2}\end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-12}\mathrm{J} = 13.6\ \mathrm{eV}$$

$$\begin{aligned}\Delta E = -En + Em &= \frac{-13.6\ \mathrm{eV}}{m^2} + \frac{13.6\ \mathrm{eV}}{n^2} \\ &= 13.6\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)\end{aligned}$$

$$\Delta E = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{13.6\ \mathrm{eV}}{hc}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$