Induction: Lois, circuit fixe et champ magnétique variable, circuit mobile et champ magnétique stationnaire

I. Phénomène d'induction

1) Mise en évidence expérimentale

a) Expérience de Faraday

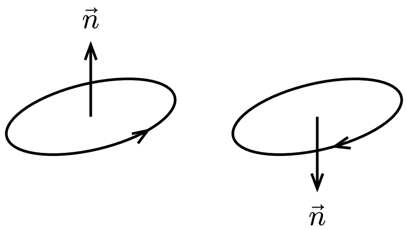
On prend deux bobines de cuivre adjacentes mais qui ne se touchent pas. On alimente une des bobine avec un courant éléctrique. Si on déplace une des deux bobines, on observe un courant électrique dans l'autre bobine: le courant est transmit « sans fil ».

b) Expérience avec un aimant

On observe le même résultat avec un aimant et une bobine électrique. On peut induire un courant dans une bobine en mettant un aimant en mouvement.

2) Flux d'un champ magnétique

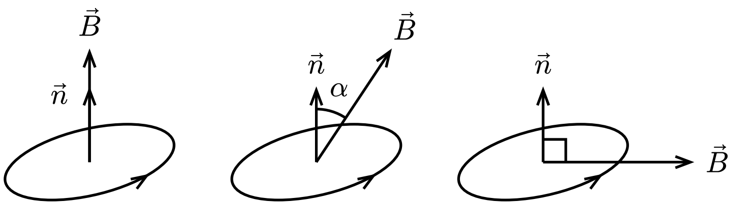
On décide d'un sens pour orienter le contour. Le sens du vecteur normal $\vec{n}$ dépend du sens pris pour orienter ce contour:



Si on a pris le « mauvais » sens par-rapport au sens du champ magnétique, il faudra rajouter des — un peu partout.

On définit le **flux** du champ magnétique par:

$$\phi = \vec{B} \cdot S\vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{S} \text{ en } \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{Wb} \text{ (weber)}$$

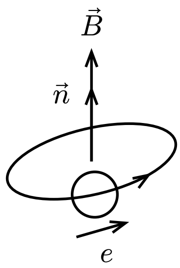


3) Loi de Faraday

⊖ THÉORÈME:
Le courant induit dans le circuit est égal à celui produit par un générateur fictif de force électromotrice e appellée force électromotrice induite dont l'expression est:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi, pour obtenir un courant induit, le flux doit **nécessairement être variable.**



⚠ Warn:
Ici, le générateur fictif doit être en convention générateur (après tout, on genère un courant dans le fil).

4) Limites de la loi de Faradary

- Il faut qu'on puisse définir un flux à chaque instant. Si, par exemple, à un moment le circuit s'ouvre, on ne peut plus définir de surface, donc on ne peut plus définir de flux. Pourtant, on observera quand même un phénomène d'induction (on peut le montrer avec les équations de Maxwell: 2^{eme} année)
- Il faut que les lignes de champ magnétique soient coupées par le flux conducteur. Dans l'autre cas, on doit introduire la notion de flux « coupé », ce qui nécessite à nouveau les équations de Maxwell.

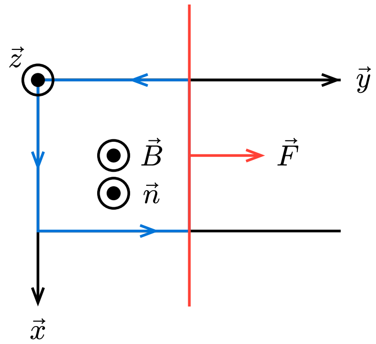
5) Loi empirique ou loi de modération de Lenz

⊖ THÉORÈME:
Les phénomènes d'induction s'opposent aux effets qui les cause.

La loi de Lenz est pratique pour expliquer avec les mains « qu'est-ce qui va se passer ».

II. Induction de Lorenz - Circuit mobile et champ magnétique stationnaire

1) Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique - Cas de la translation - Rails de Laplace générateur



La force de Laplace est ici paramétrée par B et S. Ici, le champ magnétique B est constant, mais la surface de la spire rectangulaire (formée par la boucle de courant) est variable.

D'après la loi de Lenz, la force de Laplace s'oppose aux causes donc elle va ici s'opposer à la force $\vec{F}$ et freiner la barre, et on obtiendra une génération de courant électrique dans le circuit.

La force $\vec{F}$ déplace la tige. On considère y la position horizontale de la barre. La surface de la spire rectangulaire S vaut ay avec a la largeur des rails.

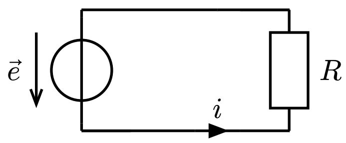
On calcule le flux magnétique:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bay$$

Par le loi de Faraday:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Bay) = -Ba\dot{y}$$

On considère le circuit créé, avec e le générateur fictif et R la résistance totale du circuit:



Par loi des mailles:

$$e - Ri = 0 \Leftrightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{-Ba\dot{y}}{R}$$

On étudie le système de la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On fait un bilan des actions mécaniques:

- Poids $m\vec{g}$
- Réaction des rails $\vec{R} = R\vec{u_z}$ perpendiculaire aux rails
- La force $\vec{F}$ appliquée sur la barre (inconnue)
- La force de Laplace $\overrightarrow{F_L}$

On a:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_L} = i\,\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}$$

On intègre sur la longueur de la barre:

$$\overrightarrow{F_L} = iaB\vec{u_y}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique:

$$m\vec{a} = m\vec{g} = \vec{R} + \vec{F} + \overrightarrow{F_L}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F + F_L \\ &= F + iaB \\ &= F - \frac{Bav}{R}aB \end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2a^2v}{Rm} = \frac{F}{m}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre:

$$v(t) = v_H(t) + v_P(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{RF}{a^2B^2}$$

On trouve $\tau = \dfrac{mR}{a^2B^2}$

On considère une vitesse initiale nulle:

$$v(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{RF}{a^2B^2}$$

Donc:

$$v(t) = \frac{RF}{a^2B^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Dans la limite, on a donc:

$$v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{RF}{a^2B^2}$$

On calcule la tension générée:

$$e = -Bav = Ri \Leftrightarrow Bav + Ri = 0$$

On fait un bilan énergétique:

> ✓ Tip:
> On multiplie la tension par l'intensité pour obtenir l'énergie du circuit électrique et la force par la vitesse pour obtenir l'énergie cinétique

$$\begin{cases} Bav + Ri = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F + iaB \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Bavi + Ri^2 = 0 \\ mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iaBv + Fv \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Bavi + Ri^2 = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = iaBv + Fv \end{cases}$$

On substitue $iaBv$ par $-Ri^2$:

$$\boxed{Fv = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2}$$

> Φ Note:
> On a Fv la puissance de la force F, et Ri^2 la puissance du circuit électrique.

2) Freinage par induction

La force de Laplace $\overrightarrow{F_L}$ est proportionelle à la vitesse:

$$\overrightarrow{F_L} = -\frac{a^2B^2}{R}\vec{v} = -\lambda\vec{v}$$

La force de Laplace va causer un freinage de type frottement fluide proportionnel à la vitesse sur le rail.

On peut donc l'utiliser pour freiner des matériaux magnétiques.

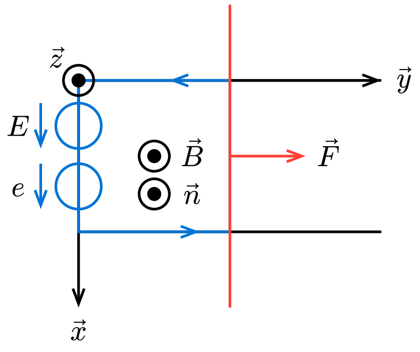
L'énergie de ce freinage n'est pas perdu: il engendre un courant électrique dans le circuit (c'est ce qu'on a vu plus haut dans un cas spécifique) appellé courant de Foucault.

Les pertes par effet joule causent un échauffement du matériau (utilisé dans les plaques à induction par exemple).

On peut utiliser un matériau feuilleté (conducteur, isolant, conducteur, isolant, etc..) pour limiter les courants de Foucaults.

3) Conversion de puissance électrique en puissance mécanique - Cas de la translation - Rails de Laplace récepteurs

On reprend presque le même circuit. On rajoute juste une force électrique qui alimente le circuit.



On a par loi des mailles l'équation électrique:

$$E + e - Ri = 0 \Leftrightarrow i = \frac{E + e}{R}$$

Équation mécanique. Sujet: barre dans le référentiel terrestre suppose galiléen. Bilan des actions mécaniques:

- Poids
- Réaction de la tige
- Force de Laplace $\overrightarrow{F_L}$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_L} = i\vec{\mathrm{d}l} \wedge \vec{B}$$

$$\overrightarrow{F_L} = iaB\vec{u_y}$$

On projette le PFD sur (O_y):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \overrightarrow{F_L}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iaB$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = aB\frac{E - Bav}{R}$$

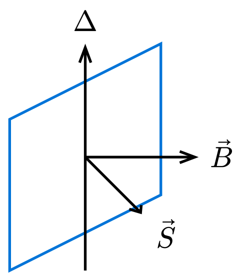
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{a^2B^2}{R}v = \frac{aBE}{R}$$

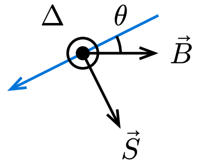
On résout l'équadiff:

$$v(t) = \left(\frac{\tau}{aB}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = \frac{mR}{a^2B^2}$$

4) Conversion de puissance mécanique en puissance électrique - Cas de la rotation

On prend un câdre métallique orienté par-rapport à un champ électrique.





$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = BS\sin(\theta)$$

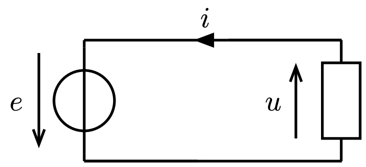
Le câdre va tourner, donc l'angle θ va varier au cours du temps.

Si le câdre tourne à vitesse angulaire constante ω, on a $\theta = \omega t$ (module θ_0 un angle initial)

On a donc $\phi = BS\sin(\omega t)$

$$\phi = BS$$

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -BS\omega\cos(\omega t)$$



Par loi des mailles:

$$e - Ri = 0$$

$$\Rightarrow e = -Bs\omega\cos(\omega t)$$

On calcule la force de laplace:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = i\vec{S}$$

$$\overrightarrow{F_L} = \mathcal{M}$$

Donc:

$$\overrightarrow{F_L} = -\frac{B^2 S^2 \omega}{R}\cos^2(\omega t)\vec{u_\theta}$$

On fait un bilan des actions mécaniques:
- Poids du cadre (de moment nul)
- Liaison pivot supposée parfaite (donc de moment nul)
- Moment résultant de la force de laplace
- Moment d'entrainement imposé pour faire tourner le cadre Γ_{ext}

Par théorème du moment cinétique:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_L = 0$$

$$\Gamma_{\text{ext}} = \frac{B^2 S^2 \omega}{R}\cos^2(\omega t)$$

$$\langle\Gamma_{\text{ext}}\rangle = \frac{B^2 S^2 \omega}{R}\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{B^2 S^2 \omega}{2R}$$

On fait un bilan énérgétique.

III. Induction de Neumann - Circuit fixe et champ mangétique variable

1) Phénomène d'auto-induction

Un courant électrique créée un champ magnétique $\vec{B}$. Ce champ magnétique fiat apparaître un flux propre (car propre au circuit) $\phi_P = \vec{B} \cdot \vec{S}$.

Or le champ magnétique $\vec{B}$ sera proportionnel à l'intensité parcourant le circuit, ce qui nous donne:

$$\phi_P = Li \text{ avec } L \text{ le coefficient d'inductance propre}$$

a) Exemple

> Soit un solénoïde d'axe Ox, de longueur ℓ comportant N spires et de section S parcouru par un courant d'intensité I. Déterminer l'inductance propre du solénoïde.
> Donner sa valeur si $N = 1000$ spires, $\ell = 20$ cm et une section circulaire de rayon $R = 5{,}0$ cm.
> Le champ magnétique créé par un solénoïde est donné par la relation $\overrightarrow{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \overrightarrow{u_x}$.

On s'interesse à une spire:

$$\phi_P = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_o \frac{N}{l} I \overrightarrow{u_x} \cdot S \overrightarrow{u_x} = \left(\mu_0 \frac{N}{l} S\right) I = LI$$

Pour l'entièreté du solénoide:

$$\phi_{P,\text{alt}} = N\phi_P$$

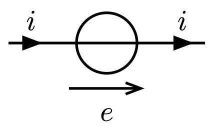
Donc:

$$L_{\text{sol}} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \text{ avec } S = \pi R^2$$

b) Force électromotrice auto-induite

C'est une bobine:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi_P}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(LI(t))}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$



c) Cohérence avec la loi de modération de Lenz

d) Bilan d'énergie

2) Couplage par induction - Induction mutuelle

On considère deux circuits: $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

a) Coefficient d'induction mutuelle

$\mathcal{C}_1$ créé un champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ proportionnel à i_1. De même, $\mathcal{C}_2$ créé un champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$ proportionnel à i_2.

On considère le flux créé par le circuit 1 vers le circuit 2 et inversement. On admet la relation suivante:

$$\phi_{1\to 2} = M_{1\to 2} i_1 \text{ et } \phi_{2\to 1} = M_{2\to 1} i_2$$

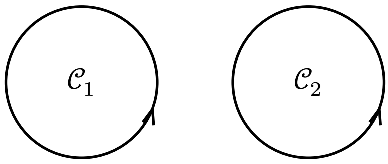
Avec $M_{1\to 2}$ le coefficient d'inductance mutuelle de $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$. On admet de plus que $M_{1\to 2} = M_{2\to 1}$.

Le champ magnétique aura une composante suivant $\vec{u_r}$ et une composante suivant $\vec{u_\theta}$

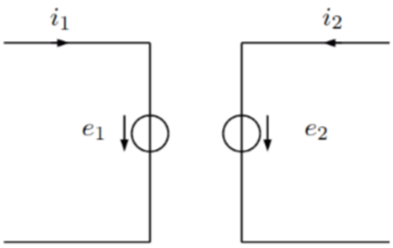
b) Exemple de calul d'inductance mutuelle

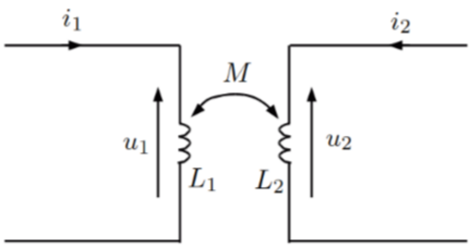
Soient deux spires coaxiales $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'axe Oz, de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs a_1 et a_2. Le champ magnétique créé par une spire de rayon R et parcourue par un courant d'intensité I en un point M de l'axe Oz de la spire et à une distance z de son centre O vaut $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2}\left(R^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \overrightarrow{u_z}$. On note $L = O_1O_2$.

1. Préciser les conséquences de l'hypothèse $a_1 \ll L$ et $a_2 \ll L$ sur la valeur du champ magnétique créé par une spire sur la surface de l'autre.
2. Déterminer le coefficient d'induction mutuelle $M_{1\to 2}$ de la spire $\mathcal{C}_1$ sur la spire $\mathcal{C}_2$.
3. Même question pour le coefficient d'induction mutuelle $M_{2\to 1}$ de la spire $\mathcal{C}_2$ sur la spire $\mathcal{C}_1$.
4. Vérifier que $M_{1\to 2} = M_{2\to 1}$.



c) Force électromotrice induite dans les deux circuits





On a:

$$e_1 = \frac{-\,\mathrm{d}\phi(\to 1)}{\mathrm{d}t}$$

$$\phi_1 = \phi_{1p} + \phi_{2\to 1} = L_1 i_1 + M i_2$$

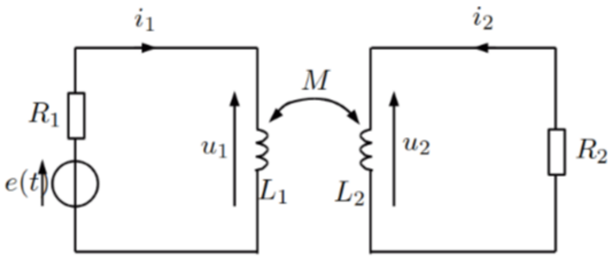
$$e_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$e_2 = -\frac{\mathrm{d}\phi_{\to 2}}{\mathrm{d}t}$$

$$\phi_{\to 2} = \phi_{2p} + \phi_{1\to 2} = L_2 i_2 + M i_1$$

$$\Rightarrow e_2 = -L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

3) Exemple de circuit couplé



⋑ TODO:
Souligner les variables complexes

Par loi des mailles / loi des nœuds:

$$\{e = -R_1 i_1 - L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0 L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + R_2 i_2 = 0$$

$$\begin{cases} R_1 i_1 + jL_1\omega i_1 = jM\omega i_2 = e \\ jL_2\omega i_2 + jM\omega i_1 + R_2 i_2 = 0 \end{cases}$$

Donc:

$$i_2(R_2 + jL_2\omega) = -jM\omega i_1$$

$$i_2 = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} i_1$$

$$e = R_1 + jL_1\omega - \frac{(jM\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

D'un point de vue énergitique:

a) Équations électriques

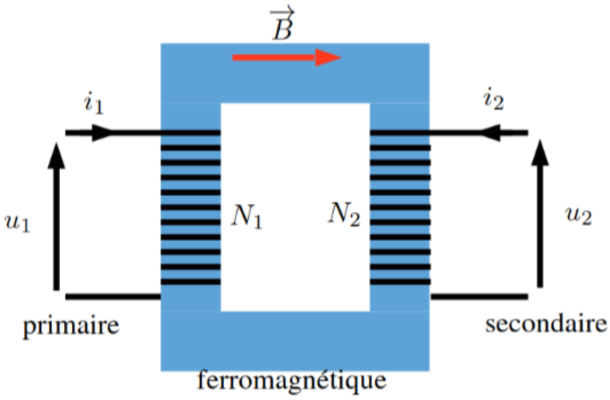
$$\begin{cases} R_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = e(t) \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

b) Régime sinusoïdal permanent

$$\begin{cases} R_1 i_1 + jL_1\omega i_1 + JM\omega i_2 = e \\ R_2 i_2 + jL_2\omega i_2 + jM\omega i_1 = 0 \end{cases}$$

c) Transfert d'énergie par induction mutuelle

4) Application: Transformateur



Avec N_1 le nombre de spires à gauche et N_2 le nombre de spires à droite.

Le premier bobinage va générer un champ magnétique.

On calcule le flux induit dans le deuxième bobinage:

$$\phi_{1\to 2} = N_2 \vec{B} \cdot \vec{S}$$

En appliquant la loi de Faraday:

$$e_2 = -\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = -N_2 S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\phi_{2\to 1} = N_1 \vec{B} \cdot \vec{S} = N_1 B S$$

$$e_1 = -\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t} = -N_1 S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{e_2}{N_2} = -S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{e_1}{N_1} \Leftrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$$