Action du champ magnétique

I. Action de $\vec{B}$ sur un courant - Force de Laplace

1) Rappel: Force de Lorentz

On rappelle qu'une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit une force magnétique dîte de Lorentz définie par $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

2) Action sur un courant

Par courant, on parle d'ensemble de particule chargées animé d'un mouvement collectif (de même vitesse).

De manière discrète, on considère N particules chargées de vitesse $\vec{v}$ identique.

La résultante des forces magnétiques sur le système est:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{v} \wedge \vec{B}$$

De manière continue, on considère pour chaque volume différentiel la force qui résulte de ce volume. Avec n la densité volumique de charge et $\mathrm{d}\tau$ le volume élémentaire:

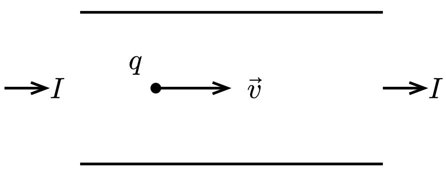
$$\mathrm{d}\vec{F} = \underbrace{(nq\vec{v})}_{\vec{\jmath}} \wedge \vec{B}\,\mathrm{d}\tau$$

On définit la **densité de force volumique**:

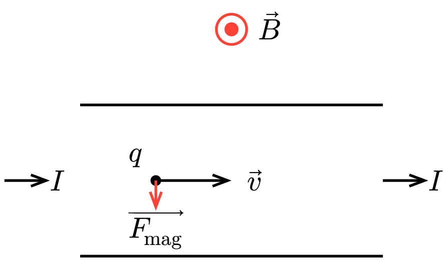
$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\tau} = \vec{\jmath} \wedge \vec{B}$$

3) Action sur un fil parcouru par un courant - Force de Laplace

On considère un fil parcourut par un courant:



Si on applique un champ magnétique à ce fil, les charges vont subir une force magnétique:



Les charges positives vont s'accumuler d'un coté, ce qui va causer une accumulation de charges négatives de l'autre côté du fil. C'est **l'effet Hall**.

La différence de charge crée un potentielle et donc un champ électrique, c'est le **champ de Hall** $\overrightarrow{E_H}$

Le champ magnétique et le champ de Hall finissent par se compenser en régime permanent (*pourquoi??*):

$$q\overrightarrow{E_H} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E_H} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Donc au final, les charges mobiles ne subissent aucune force. Mais le fil possède aussi des charges fixes. Ces charges vont subir l'action du champ de Hall. Indirectement, les charges fixes (le fil en lui-même) subissent donc la force magnétique appliquée aux charges mobiles.

Pour trouver la valeur de cette force, on reprend l'expression différentielle de la force sur une petite unité de volume du fil:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\jmath}\,\mathrm{d}\tau \wedge \vec{B}$$

On s'intéresse à un fil, donc on considère le volume linéique:

$$\vec{\jmath}\,\mathrm{d}\tau = I\overrightarrow{\mathrm{d}L}$$

La force subie par le fil, la **force de Laplace** vaut donc:

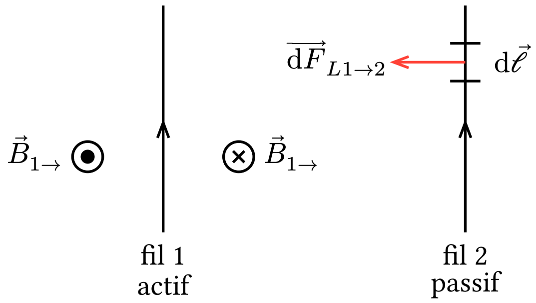
$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F_L} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}}$$

4) Ancienne définiton légale de l'Ampère

On va considérer que certains fils sont actifs (ils vont créer des champs magnétiques) et que certains fils sont passif (ils vont subir l'effet de champ magnétiques).

On considère deux fils parcourus par des courants I_1 et I_2, distants de d.

Si on considère le fil 1 comme actif, il créé un champ magnétique autour de lui-même. Le fil 2 considéré comme passif subit alors une force de Laplace:



Mais l'action est réciproque: en considérant le fil 2 comme actif, il créé de même un champ magnétique, et le fil 1 subit une force de Laplace.

> ⋑ TODO:
> Schéma inverse

Le fil 1 crée un champ magnétique d'intensité:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r}\vec{u_\theta}$$

Une portion de taille l du fil 2 subit:

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = I_2 l \vec{u_z} \wedge \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d}\vec{u_\theta} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{l}{d}\vec{u_r}$$

On définit l'ampère comme l'intensite du courant qui maintenu dans deux conducteurs rectilignes, infinis, parallèles, de section circulaire négligeable et distants de 1m produit une force d'interaction entre ces deux conducteurs égale à $2 \cdot 10^{-7} \quad \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

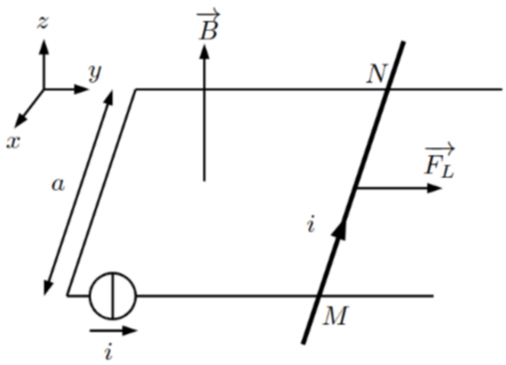
5) Résultante des forces de Laplace

On considère un conducteur $\mathcal{C}$ (un ensemble de points).
On somme la force de Laplace sur l'intégralité du conducteur:

$$\overrightarrow{F_L} = \int_{P \in \mathcal{C}} I(P)\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}(P)$$

a) Exemple

Une tige conductrice est posée sur deux rails conducteurs parallèles distants de a et constituant un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité I créé par un générateur. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme orthogonal au plan des rails. Déterminer la force de Laplace s'exerçant sur la tige.



On étudie le système de la barre, on se place dans le référentiel terrestre supposé Galiléen, on fait un bilan des forces:
- Poids
- Réaction des rails (par de frottement donc on considère uniquement une réaction normale)
- Force de Laplace $\overrightarrow{F_L}$

On calcule la force de Laplace:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_L} &= \int_0^{-a} I(\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}) \wedge B\vec{u_z} \\ &= -\int_0^a I(\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}) \wedge B\vec{u_z} \\ &= \int_0^a IB\,\mathrm{d}x\vec{u_y} \\ &= IaB\vec{u_y}\end{aligned}$$

6) Puissance des forces de Laplace

La puissance est définie par:

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}$$

> ⚠ Warn:
> Ici, $\vec{v}$ se réfère à la **vitesse du circuit** et pas la vitesse des charges du courant.

En reprenant l'exemple précedent, la vitesse va nécessairement être dirigée le long de l'axe $\vec{u_y}$:

$$\mathcal{P}_L = \left(IaB\vec{u_y}\right) \cdot \left(v\vec{u_y}\right) = IaBv \neq 0$$

7) Couple de Laplace sur une spire rectangulaire

Une spire rectangulaire est un cadre rectangulaire parcouru par un courant

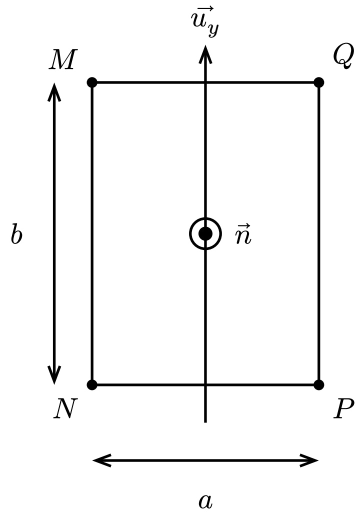


Fig. 5. – Vue du dessus

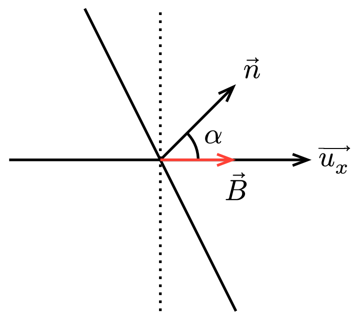


Fig. 6. – Vue de coté

On calcule les forces de Laplace sur chacun des fils du cadre:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{MQ} &= IaB\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\vec{u_z} \\ &= IaB\cos\alpha\vec{u_z}\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{PN} = -IaB\cos\alpha\vec{u_z}$$

$$\vec{F}_{QP} = -IbB\vec{u_y}$$

$$\vec{F}_{NM} = IbB\vec{u_y}$$

En fait la résultante des forces:

$$\vec{F} = \vec{F}_{MQ} + \vec{F}_{PN} + \vec{F}_{QP} + \vec{F}_{NM} = \vec{0}$$

De plus, les forces sont à une même distance du centre O.

Les forces $\vec{F}_{MQ}, \vec{F}_{NP}$ et $\vec{F}_{QP}, \vec{F}_{MN}$ forment des couples.

On calcule les moments qui résultent:

On pose T le milieu du segment $[MQ]$ et J le milieu du segment $[QP]$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{MQ}\right) = \overrightarrow{OT} \wedge \vec{F}_{MQ} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{PN}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{QP}\right) = \overrightarrow{OJ} \wedge \vec{F}_{QP} = -\left(\frac{a}{2}\sin\alpha\right)IbB\vec{u_z}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{NM}\right) = -\frac{a}{2}\sin\alpha IbB\vec{u_z}$$

On calcule le couple:

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{QP}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{NM}\right) \\ &= -a\sin\alpha IbB\vec{u_z}\end{aligned}$$

Comme l'angle entre la normale $\vec{n}$ et l'axe $\overrightarrow{u_x}$ vaut α, et que $(\vec{n}, \overrightarrow{u_x}, \vec{u_z})$ forme une base indirecte, on a:

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{u_x} = -\sin\alpha\vec{u_z}$$

Donc:

$$\vec{\Gamma} = IabB(\vec{n} \wedge \overrightarrow{u_x}) = Iab\left(\vec{n} \wedge \vec{B}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \text{ avec } \overrightarrow{\mathcal{M}} = Iab\vec{n}$$

On appelle $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ le moment magnétique et $\vec{\Gamma}$ le couple de Laplace. $\vec{\Gamma}$ est un moment. (On peut aussi poser $\vec{S} = ab\vec{n}$ et on a $\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\vec{S}$)

8) Puissance du couple de Laplace

$\vec{\Gamma}$ est sur l'axe (O_z), donc:

$$\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u_z}$$

Donc le cadre tourne autour de l'axe (O_z). On pose le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u_z}$ du cadre, et on a:

$$\mathcal{P} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} = \Gamma\Omega = (-IabB\sin\alpha)\dot{\alpha}$$

II. Action d'un champ magnétique sur un aimant

1) Résultante des forces sur un dipole magnétique dans un champ uniforme

On veut calculer la résultante des forces de Laplace sur un dipole magnétique, défini par un contour parcouru par un courant:

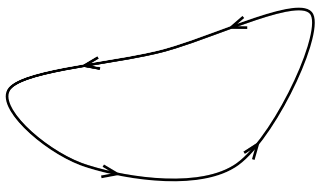


Fig. 7. – Le dipole

✓ Tip:
On s'interesse au cas général de la spire rectangulaire vu ci-dessus.

On calcule la force de Laplace pour chacun des points appartenant au contour du dipole:

$$\overrightarrow{F_L} = \oint_{M \in \mathcal{C} \text{ fermé}} I \, \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \vec{B}(M)$$

On suppose que le champ magnétique $\vec{B}$ est uniforme:

$$\overrightarrow{F_L} = I \left(\oint_{M \in \mathcal{C}} \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \right) \wedge \vec{B}$$

Or l'intégrale du mouvement élémentaire sur un contour vaut 0, donc la résultante des forces est nulle:

$$\overrightarrow{F_L} = \vec{0}$$

Donc la seule action mécanique qu'on peut attendre sur un dipole, c'est un couple. On ne pourra pas obtenir de translation.

⚠ Warn:
Si on retire l'hypothèse de champ uniforme, ce résultat est (de manière plutôt logique) faux.

2) Moment exercé sur un dipole magnétique

$$\vec{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = I\vec{S} \wedge \vec{B}$$

Avec $\mathcal{M}$ allant du pôle sud vers le pôle nord, et $\vec{S}$ le vecteur normal de la boucle de courant multiplié par sa surface.

3) Energie potentielle d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique

On a:

$$E_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

4) Orentiation d'un aimant dans un champ magnétique

On étudie les positions d'équilibres. En notant θ l'angle entre $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$, on est à l'équilibre si:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

On a:

$$E_p = -\mathcal{M} B \cos\theta$$

Donc:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = \mathcal{M} B \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[\pi]$$

Ces positions d'équilibres sont stables si:

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2} > 0$$

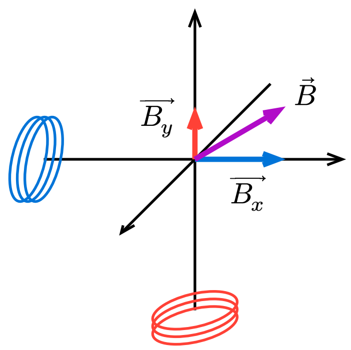
$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = \mathcal{M} B \cos(\theta)$$

Si $\theta = 0$, l'équilibre est stable. Si $\theta = \pi$, l'équilibre est instable.

III. Création d'un champ magnétique tournant - Effet moteur

1) Création du champ magnétique tournant

Pour créer un champ magnétique tournant, on utilise deux bobines situées sur les axes (O_x) et (O_y), qui créent des champs magnétiques sur ces axes:



On alimente les bobines avec deux courant alternatifs i_x et i_y en quadrature de phase:

$$\overrightarrow{B_x}(t) = K_x i_x(t) \overrightarrow{u_x} = K I_0 \cos(\omega_0 t) \overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{B_y}(t) = K_y i_y(t) \overrightarrow{u_y} = K I_0 \sin(\omega_0 t) \overrightarrow{u_y}$$

On place un aimant au centre du dispositif.

Par principe de superposition, on peut obtenir le champ magnétique subit par l'aimant:

$$\vec{B}(t) = K I_0 \left(\cos(\omega_0 t) \overrightarrow{u_x} + \sin(\omega_0 t) \overrightarrow{u_y}\right)$$

Le champ magnétique $\vec{B}$ est donc un vecteur qui tourne avec une vitesse angulaire ω_0.

L'aimant essaye constamment de s'aligner avec ce champ magnétique: on obtient un mouvement de rotation de l'aimant.