

# Circuit Linéaire du Second Ordre

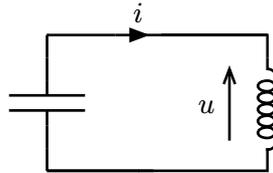
1. Oscillations libres du circuit  $L, C$  ..... 1
2. Circuit linéaires du second ordre ..... 2

## I. Oscillations libres du circuit $L, C$

### 1) Circuit ( $L, C$ )

---

On utilise le circuit:



On commence avec  $C$  chargé par une tension.

$C$  est en convention générateur,  $L$  est en convention récepteur.

On a:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$i = -C \frac{du}{dt}$$

On remplace pour obtenir une équation différentielle en une seule variable:

$$u = -LC \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$i = -LC \frac{d^2i}{dt^2}$$

On peut les écrire sous la forme:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

#### !! Caution:

La forme exacte de l'équation est essentielle pour dire qu'il s'agit d'un oscillateur harmonique. Par exemple, une équation du type

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \omega_0^2 u = 0$$

N'est PAS un oscillateur harmonique.

### 2) Solution d'un oscillateur harmonique

---

Lorsqu'on est face à un oscillateur harmonique, on peut parachuter la forme de la solution, qui sera:

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ &= U \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

### 3) Conditions initiales

On a deux constantes à déterminer:  $(A, B)$  ou  $(U, \varphi)$ , en utilisant les conditions initiales  $u(0)$  et  $u'(0)$  (solution d'un problème de Cauchy)

Pour obtenir les conditions initiales, on utilisera toujours les conditions de continuité.

Ici, comme on a deux conditions initiales à déterminer, il nous faudra deux conditions de continuité:

- La continuité de la tension aux bornes de  $C$
- La continuité de l'intensité traversant  $L$

### 4) Bilan énergétique

On repart des l'équations originales:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$i = -C \frac{du}{dt}$$

Pour obtenir une puissance, on peut soit multiplier la première par  $i$ , soit la deuxième par  $u$ :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$ui = Li \frac{di}{dt}$$

$$-C \frac{du}{dt} u = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

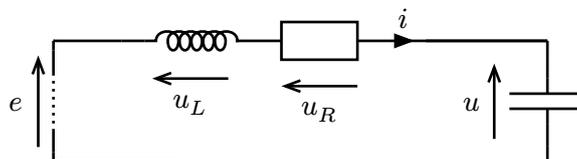
$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right) = 0$$

Donc échange d'énergie sans perte.

## II. Circuit linéaires du second ordre

### 1) Circuit $R, L, C$ en série



Φ Note:

On obtient un résultat similaire avec un circuit  $R, L, C$  en parallèle

On utilise un signal échelon:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On a:

$$\begin{aligned}
e &= u + u_R + u_L \\
&= u + Ri + L \frac{di}{dt} \\
&= u + RC \frac{du}{dt} + L \frac{di}{dt} \\
&= u + RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2}
\end{aligned}$$

On peut le laisser sous cette forme, ou tout diviser par  $LC$ :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{LC} e$$

On pose:  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . On obtient cette forme:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 e$$

Pour trouver  $Q$ , on identifie:

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{Q\sqrt{LC}} \Leftrightarrow Q = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

## 2) Régime libre ou régime propre

---

**Régime libre ou régime propre:** régime se mettant en place en l'absence de source, c'est à dire quand  $e = 0$ , on s'intéressera donc uniquement à la description du régime transitoire.

### 3) Équation caractéristique - Trois types de régimes

Pour résoudre l'équation différentielle du second ordre qu'on obtient, on utilise l'équation caractéristique:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

- Si  $\Delta > 0$ :

On trouve deux solutions réelles à l'équation caractéristique.

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

On a  $u(t)$  de la forme  $u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

✓ Tip:

Le régime transitoire fini par disparaître: les exponentielles doivent tendre vers 0

$r_2 < 0$  de manière évidente. Pour  $r_1$ :

$$-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \underbrace{\sqrt{1 - 4Q^2}}_{<1}$$

$\sqrt{1 - 4Q^2} < 1$ , donc  $r_1 < 0$ .

On appellera ce régime le régime **apériodique**.

Comme  $\Delta > 0$ ,  $\frac{1}{Q^2} - 4 > 0$ , donc:

$$\frac{1}{Q^2} > 4 \Leftrightarrow \frac{1}{Q} > 2 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

Ainsi:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On verra ce régime avec un fort amortissement (grande résistance).

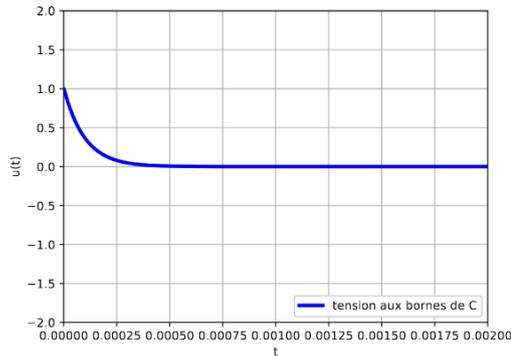


Fig. 3. – Simulation d'un régime apériodique

- Si  $\Delta = 0, Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Cette situation sera peu commune, car l'égalité doit être rigoureuse.

Dans ces conditions, on parlera de régime **critique**.

C'est la limite entre les deux autres régimes.

On a une solution réelle double:

$$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

La solution est alors de la forme:

$$u(t) = Ae^{r_0 t} + Bte^{r_0 t} = (A + Bt)e^{r_0 t}$$

Le régime critique est le plus rapide dans le retour à zéro.

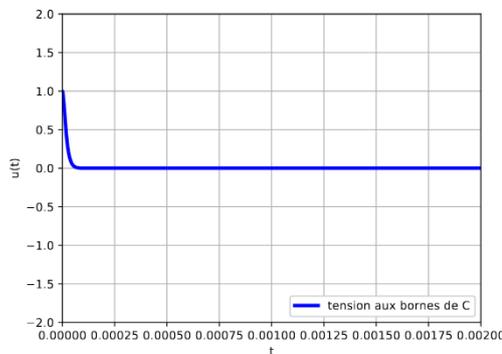


Fig. 4. – Simulation d'un régime critique

- Si  $\Delta < 0,$

$$Q > \frac{1}{2} \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On a deux solutions complexes conjuguées:

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}$$

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Φ Note:

On cherche des solutions réelles. On va donc directement écrire  $u(t)$  avec des cos et des sin

$$u(t) = (U_1 \cos(\omega t) + U_2 \sin(\omega t))e^{-t\frac{\omega_0}{2Q}}$$

$$\text{avec } \omega = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} = \frac{\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q}$$

$$\text{ou } u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)e^{-t\frac{\omega_0}{2Q}}$$

✓ Tip:

Pour la forme de la solution: la partie réelle des solutions complexes détermine l'amortissement, la partie complexe détermine la période.

On appellera  $\omega$  la **pseudo-pulsation**, et ce régime **pseudo-périodique**.

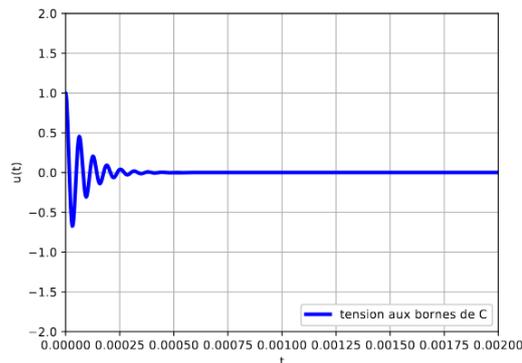


Fig. 5. – Simulation d'un régime pseudo-périodique

On peut ainsi calculer la **pseudo-période**:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi Q}{\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Pour qualifier la baisse d'amplitude avec le temps, on définit le **décroissement logarithmique**:

$$\delta = \ln \left( \frac{u(t + nT)}{u(t + (n + 1)T)} \right) = \frac{1}{N} \ln \left( \frac{u(t + nT)}{u(t + (n + N)t)} \right)$$

Φ Note:

On calcule la valeur d'avant sur la valeur d'après: on mesure la décroissance.

On reprend la forme  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)e^{-t\frac{\omega_0}{2Q}}$ :

$$\begin{aligned}\delta &= \ln\left(\frac{u(t+nT)}{u(t+(n+1)T)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{U \cos(\omega(t+nT) + \varphi) e^{-(t+nT)\frac{\omega_0}{2Q}}}{U \cos(\omega(t+(n+1)T)) e^{-(t+(n+1)T)\frac{\omega_0}{2Q}}}\right)\end{aligned}$$

Les cosinus sont pris à une période d'écart, et sont donc égaux:

$$\begin{aligned}\delta &= \ln\left(\frac{\exp\left(-\left(t+nT\right)\frac{\omega_0}{2Q}\right)}{\exp\left(-\left(t+(n+1)T\right)\frac{\omega_0}{2Q}\right)}\right) \\ &= \ln\left(\exp\left(-\left(t+nT\right)\frac{\omega_0}{2Q} + \left(t+(n+1)T\right)\frac{\omega_0}{2Q}\right)\right) \\ &= \frac{\omega_0}{2Q}(-t-nT+t+nT+T) \\ &= \frac{\omega_0}{2Q}T = \frac{\omega_0}{2Q} \frac{4\pi Q}{\omega_0 \sqrt{4Q^2-1}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}\end{aligned}$$

Le régime pseudo-périodique est obtenu dans le cas d'un faible amortissement,

soit quand  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Si  $R \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Leftrightarrow Q \gg \frac{1}{2}$

Quand  $Q \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  et  $T \approx T_0$ . Plus l'amortissement est petit, plus on s'approche d'un vrai régime périodique.

#### 4) Réponse à un échelon de tension

---

On a pour l'instant résolu l'équation dans le régime libre.

Si on applique un échelon de tension, on tend juste vers un régime permanent de tension différente.

#### 5) Aspects énergétiques

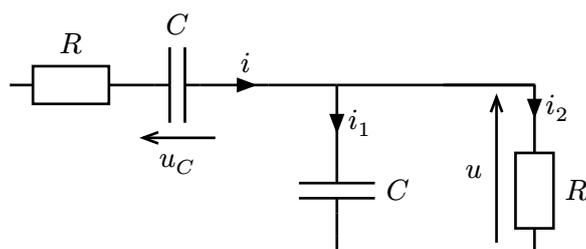
---

On repart de l'équation différentielle:

$$\begin{aligned}e &= u + u_R + u_L \\ ei &= ui + Ri + L \frac{di}{dt} \\ ei &= uC \frac{du}{dt} + Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) \\ ei &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2\end{aligned}$$

Une partie est stockée dans la capacité, une partie est stockée dans la bobine, et une partie part en effet Joule dans la résistance.

## 6) Un exemple: le pont de Wien



a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$

$$i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = C \frac{du}{dt}$$

$$i_2 = \frac{u}{R}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$e = u + Ri + u_C$$

On dérive:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{du}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} \\ &= \frac{du}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \\ &= \frac{du}{dt} + R \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) + \frac{i_1 + i_2}{C} \\ &= \frac{du}{dt} + R \frac{d}{dt} \left( C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \right) + \frac{1}{C} \left( C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \right) \\ &= \frac{du}{dt} + RC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} \end{aligned}$$

Donc:

$$RC \frac{d^2u}{dt^2} + 3 \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{de}{dt}$$

b) L'écrire sous forme canonique. Donner les expressions de  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $R, C$

On met sous forme canonique:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}u = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R^2C^2} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{3}$$

Le circuit sera toujours apériodique car  $Q < \frac{1}{2}$ , on a donc un fort amortissement (logique car dans un  $RLC$  série,  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ).